General Relativity
and
Gravitational Waves
by
Joseph Weber

一般相対論と重力波

藤田純一　訳

講　談　社



A. Einstein 1879–1955

序　　　文

一般相対論が改めて興味を持たれているのは幾つかの理由がある。理論家にとってアインシュタインの重力場を量子化することは素粒子の新しい理論を建設し，量子論的な場の理論の困難を改善するための挑戦を意味する。実験家にとっては過去20年間の技術的な進歩により新しい重力実験が可能となり，古い実験をもっと精度の高い方法で行うことができるようになっている。

この程度の大きさの一般相対論の教科書はとても完全なものではありえない。私は理論の基礎，この分野に通常要求されるリーマン幾何学，テンソル解析，また保存則，古典的な実験についてのかなり徹底的な紹介を試みたつもりである。

この本の約 1/4 は主として重力輻射の理論的，実験的側面の取り扱いに捧げた。最後の章は運動方程式，統一場の理論，宇宙論の問題のフリードマンの解，一般相対論のハミルトニアンによる定式を導出する問題についての簡単な議論を与える。

この小冊子はメリーランド大学の物理学教室における私の相対論のコースの教科書として使われている。

John A. Wheeler 教授に対して教授と共に過した刺激の多い年月を，James Anderson 教授の講義の中でこれらの場の方程式をはじめて知ったことを，Peter G. Bargmann 教授から沢山の有益なコメントをスティーヴンス工科大学のコロキウムで与えられたことを，また Charles Misner 博士から数多くの問題について透徹した御注意を受けたことに対して心から感謝したい。この本の幾つかの章は大学院学生 George Hinds 氏との議論を通して大幅に改良された。また C. J. Goebel 教授は原稿に眼を通し，貴重な批判を加えて下さった。ここに掲げた Einstein の写真は T. Ehrenfest Afanassjewa 夫人の御好意によるものである。

私自身の研究は国立科学財団の援助を受けてきた。

J. Weber

内　容　目　次

第1章
等　価　原　理

正確な物理的等価性の仮定は座標系の絶対的加速についてわれわれが語ることを不可能にする。ちょうど通常の相対論が系の絶対的な速度を語ることを禁止するように。

A. Einstein

1.1　エートヴェェッシュ (Eötvos) の実験

ニュートンの時代から，ある物体の慣性質量と重さ（重力質量）の比はすべての物質に対して同じであると仮定されてきた。もしこれを仮定し，地球の重力場の中での物体の運動方程式を書くなら，質量は消去されてすべての自由に落下する物体は同じ加速度をもつ。

1890年に Eötvos (1) は，慣性質量と重さの比を調べるために工夫された巧

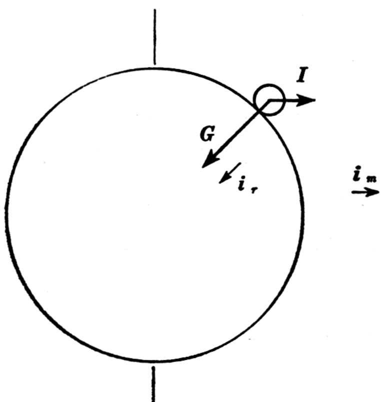


図　1.1

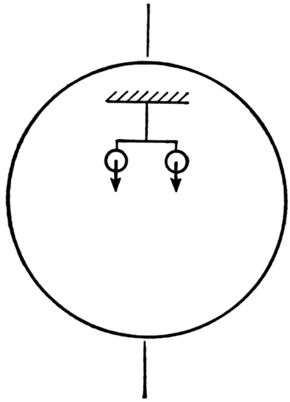


図 1.2

みな実験を遂行した。地球の表面におかれた一つの質量を考えよう。(1.1図) 地球の中心に向かって働く重力$\boldsymbol{G}$と地球の回転に伴う遠心力であるところの慣性力$\boldsymbol{I}$が存在する。これらの力の大きさの比および相当する成分の比は重力と慣性質量の比に依存する。Eötvos は二つの質量をねじり秤から，1.2図のように，赤道と極の中間の緯度につるした。天秤は観測者の水平面上におかれた質点を結ぶ棒が東西方向に向いて平衡状態にあると考えよう。最初に二つの物体に働く力の全体 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I}$ の鉛直成分から生ずる全トルクの成分はゼロであることが結論できる。もし慣性質量と重力質量の比が両者に対して同じでないなら，$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I}$ の水平成分はトルクを生じ，吊っている針金の反対向きのトルクによって相殺される。いま全装置をπだけ回転すると，物体は入れ替わり $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I}$ の水平成分に関連したトルクの符号は逆になるであろう。しかし，吊っている針金のトルクは同じままである。結論として棒および2物体がもつ装置に相対的な角度のふれは，慣性質量と重力質量の比が両物体に対して同じでないときに観測されるであろうということである。

一つの物体の重力質量を M_1，慣性質量を m_1 としよう。$\boldsymbol{i}_r$ をその物体から地球の中心へ向く単位ベクトル，$\boldsymbol{i}_m$ を地球の回転軸に垂直な子午面内の単位ベクトルとする。g_e を地球の重力場の大きさとしよう。そのとき重力$\boldsymbol{G}_1$は

$$\boldsymbol{G}_1 = g_e M_1 \boldsymbol{i}_r \qquad (1.1)$$

a を地球の半経，ω を角速度，φ を緯度としよう。そのとき慣性（遠心）力 $\boldsymbol{I}_1$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{I}_1 = (m_1 a\omega^2 \cos\varphi)\boldsymbol{i}_m \qquad (1.2)$$

第2の物体は重力質量 M_2，慣性質量 m_2 をもつと考える。ねじり秤を用いて第1の物体と第2の物体に働く力を比較する。M_1 と M_2 は棒が中点で支えられるようにえらばれていると仮定しよう。棒はベクトル $\boldsymbol{b}$ によって表現され，トルクを $\boldsymbol{T}$ で表すものとしよう。次の式を書くことができる。

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{b}}{2} \times [\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{G}_2] + \frac{\boldsymbol{b}}{2} \times [\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2] \qquad (1.3)$$

四つの力の合力は棒を支える細い針金の向きをもたなければならない。そうして

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 \qquad (1.4)$$

で与えられる。

支えている針金に平行なトルクの成分は観測できる回転をひき起こす傾向をもつであろう。上に述べた表式を用いると有効なトルクとして

$$T_{\parallel} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{F}|}$$

$$\approx \frac{(g_e[M_1 + M_2]\boldsymbol{i}_r + a\omega^2 \cos\varphi [m_1 + m_2]\boldsymbol{i}_m)\cdot \boldsymbol{b} \times [\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2]}{2g_e(M_1 + M_2)} \qquad (1.5)$$

(1.5) 式の中で分母の遠心力の項は重力に比べて非常に小さいから無視した。(1.5) 式を評価するために

$$\alpha_1 = M_1/m_1;\ \alpha_2 = M_2/m_2 \qquad (1.6)$$

を代入し，有効なトルクとして次式が得られる。

$$T_{\parallel} \approx \frac{a\omega^2 \cos\varphi\, m_1 m_2 (\alpha_1 - \alpha_2)[\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_m]}{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2} \qquad (1.7)$$

(1.7) 式は，もし $\alpha_1 = \alpha_2$ ならゼロとなる。$\alpha_1 \neq \alpha_2$ のときには，子午面に垂直なベクトル $\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_m$ に関して棒の向き $\boldsymbol{b}$ に依存する値をもつ。$\boldsymbol{b}$ が東西方向を向くときに極大となる。前に注意したようにねじり秤は地球の表面に接する

平面の中で東西方向に棒が向くまで回転することにより平衡となる。次に $\boldsymbol{b}$ の向きを逆にするように装置を角度 π だけ回転する；もし $\alpha_1 \neq \alpha_2$ なら天秤を吊っている座標系に相対的に棒の回転をひき起こすようなトルクが生ずるであろう。Eötvos は回転がないことを観察し，テストされたすべての物質について 10^{-8} の精度で $\alpha_1 = \alpha_2$ であることを結論した。この実験は後に繰り返された(2)(3)。Southerns は振り子についての仕事を行い，放射性物質に対して α が等しいことを示した。R. H. Dicke 教授(4)はエートヴェッシュの実験を3個の物体を用い，3回対称軸を使って局所的な擾乱を極小化して非常に改良した装置によって繰り返している。現在の時点で彼の結果は Eötvos の結果と一致し，ある種の物質に対して α の等しいことは 10^{-10} の数倍の精度で確立されている。

エートヴェッシュの実験は素粒子に関してもある結論をひき出すことを可能にする。電子および陽子に対する質量と重さの比は 10^{-7} の精度で中性子に対するそれと同じであることが示される。そこで核の結合力から生ずる原子核の質量の減少には 10^{-5} の精度で重さにおける同様な減少が付随していることが示されうる。1000分の5の精度で軌道電子の結合エネルギーは相当する重さの変化を伴うことが結論できる。

Bondi (5) は作用を受ける質量と重力場の源であるところの質量を区別できるかもしれないことを注意している。作用を受ける質量を受動的な重力質量と呼び，源であるところの質量を能動的な重力質量と呼ぶ。この見地に立つと，エートヴェッシュの実験は慣性質量と受動的重力質量の比が等しいことを決定したことになる。

1.2 負 の 質 量

ニュートンの重力理論でも相対論的な重力理論でも負の質量の存在はあらかじめ除外されているわけではないが，経験的事実としてそういうものは観測されたことがない。ニュートンの重力理論も一般相対論も両方とも負の質量に対して電気力学における対応する状況とはまったく異なった振舞を示す。もし小

さな負の質量が大きな正の質量と相互作用するなら，ふたたび（負の）質量は運動方程式の両辺で打ち消し合い，加速度はやはり正の質量の方に向く，したがって正の質量は正負両方のすべての他の質量を引きつける。小さな負の質量は地球の重力場の中で落下することが期待される。同様に負の質量はその符号にかかわらずすべての他の質量を押しのける。一対の物体があり，一つは正，一つは負の質量をもち，それらの大きさがだいたい等しいなら，正の質量は負の質量を引きつけ，負の質量は正の質量を押しのけ，一つが他を追いかける。もし運動が中心を結ぶ直線上に束縛されているなら，その一対は一様な加速度をもって運動することが期待される。この問題は Bondi (5)によって議論された。

Schiff (6)は最近ある反粒子すなわち陽電子の重力質量が負であるかもしれない可能性を考慮した。彼の議論はくりこまれた量子電気力学に基づいている。原子核のクーロン場は真空の偏極を生ずる。この効果は最初 Uehling (7)により水素に対して計算され，水素の $2S$ 状態のラム・シフトに 27Mc の寄与を生ずる。真空偏極と結びついた仮想的な電子・陽電子対は原子のくりこまれた質量に寄与することが期待される。われわれは実験から陽電子の慣性質量は正であることを知っている。もし重力質量が負であったとしたら，異なった原子では慣性質量と（受動的な）重力質量の比が少し異なることが期待される。このことは仮想的な対による質量への相対的寄与は核の電荷とその分布に依存することから結論される。異なった原子に対し，その効果も異なるのであろう。陽電子の重力静止質量が負電荷の電子のそれと大きさが等しく符号が反対であって，その運動エネルギーは重力場によって通常のように作用を受ける場合には重力質量とくりこまれた慣性質量の違いは有限で，近似的に

$$(3m/8\pi)(Z/137)^2\int_0^\infty |F(q)|^2 dq/(q^2+4\mu^2)^{1/2}$$

に等しい(6)。ここにMは電子の質量，$\mu=mc/\hbar$，Z は原子番号，$F(q)$は全体で単位の電荷に規格化された核の電荷分布のフーリエ変形を表す。この表式はアルミニウム，銅，白金に対して原子の質量に対する比としてそれぞれ 10^{-7}，2×10^{-7}，4.3×10^{-7} という値をもつ。これらの数は Eötvos により決定された

質量の比の不確定より大きいから，Schiff は陽子の重力質量が負である可能性は除外されたと結論する。

反中性子が地球の重力場の中で落下するかどうかを調べる実験が試みられうることはありそうなことである。前に注意したようにもし重力の現存する理論が受け入れられるなら，いかなる場合にも落下することが期待される。

1.3 異なる座標系の同等性

2種類の質量が同等であるという経験的な事実は，Einstein(5) によって異なった座標系の等価性によりそれが理解できることを指摘されるまで，理論物理学のどこにもうまく適合しなかった。Einstein は重力場のない領域における加速系は時間に依存しない重力場をもつ与えられた無限小領域† における静止系と同等である†† と要請した。この要請から重力質量と慣性質量の等価性は，次の議論(8)によって，一つの帰結であることが示される（1.3図）。ここで z 軸が一致している二つの系 Σ と Σ' を考える。Σ 系は強さ g の重力場の中に静止していると仮定される。Σ' 系では重力場がないと仮定するが正の z 方向に加速度 g で加速されている。$t=0$ においてエネルギー E_α をもつ光のパルスが

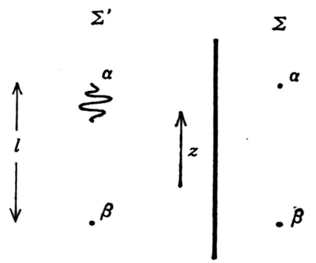


図 1.3

† 本当の重力場は均一でないから，大きな領域の上でただ一つの加速系によってそれを置きかえることはできない。

†† これは均一で静的な重力場の中にある系について局所的になされるすべての観測が均一な加速が加えられた系についてのそれと同じであろうということを意味する。

点αから放出され，そのとき$\sum'$は静止しているものとする。この光は点βで吸収され，その時刻において$\sum'$の速さは gl/c である。

光はエネルギー E_α，運動量 E_α/c をもつとしよう。点βにおけるエネルギーはローレンツ変換を用いて得られ次式で与えられる。

$$E_\beta = E_\alpha \cos\psi + iE_\alpha \sin\psi \tag{1.8}$$

ただし

$$\cos\psi = (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}},\quad \sin\psi = (-iv/c)(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

(1.8) を評価して

$$E_\beta = E_\alpha[(c+v)/(c-v)]^{\frac{1}{2}} \approx E_\alpha(1+v/c) = E_\alpha + E_\alpha gl/c^2 \tag{1.9}$$

等価原理から，(1.9)式が$\sum$系の中で起こる同じ過程に対して成立することを仮定する。$\sum$系で，質量 M がはじめαにあり，やがてβへ移るものと想像しよう。エネルギー E_α の光はαで放出されβにおいて質量 M によって吸収される。M および吸収された光の重力質量の総和は M' である。M' をαまでもう一度ひきあげ光を再放出するとαにおける質量はふたたび M である。この過程を通してエネルギーの実質的変化はないからαからβへ行くときのエネルギーの変化は戻るときのエネルギー変化に等しいと置くことができる。

$$Mgl + E_\beta - E_\alpha = M'gl \tag{1.10}$$

(1.9) を用いて

$$M' - M = E_\alpha/c^2 \tag{1.11}$$

が得られる。

(1.11)式は重力質量の増加は慣性質量の変化であることを表しており，質量と重さの等価性は加速系と重力場の同等性の一つの結果と考えることができる。

1.4　スペクトル線の重力による赤方偏移

等価原理からスペクトル線の重力による赤方偏移が期待されることも結論される。なぜならもう一度，瞬間的に静止している加速系 $\sum'$ においてαという点で原子によって光が放出されると考えよう。振動数νの光はβにおける観測

者によって受け取られ，その固有時間を単位として振動数が測定される。βにおける振動数はドップラー・シフトにより

$$\nu_\beta=\nu_\alpha[(c+v)/(c-v)]^{\frac{1}{2}} \tag{1.12}$$

すなわち

$$\nu_\beta\approx\nu_\alpha(1+v/c) \tag{1.13}$$

となる。同等な重力場でもやはり（1.13）式が成り立ち

$$E_\beta/E_\alpha=\nu_\beta/\nu_\alpha=1+gl/c^2 \tag{1.14}$$

で与えられる。

（1.14）式の量 gl は重力ポテンシャルの変化で，振動数のずれ $\nu_\beta-\nu_\alpha$ を

$$\Delta\nu=\nu(\varphi_\alpha-\varphi_\beta)/c^2 \tag{1.15}$$

と書く。(1.15）の中で φ_β は光を受けとる点における重力ポテンシャル（負の量）であり，φ_α は光が放出される点での重力ポテンシャルである。星から地球上で受けとる光は $\varphi_\beta>\varphi_\alpha$ である。もし M を星の質量，G を重力定数，r_s を星の半径，m と r_e はそれぞれ地球の質量と半径であるとすると，(1.15）式は

$$\Delta\nu\approx-\frac{\nu G}{c^2}\left[\frac{M}{r_s}-\frac{m}{r_e}\right] \tag{1.16}$$

となる。

これは赤方偏移を予言する。(1.16)を導くときに重力場の中でさえ，振動数は原子または分子の局所的な固有時を用いれば不変のままに留まることを仮定した。この仮定は本当は原子に関する供述である。それは振り子時計に対して明らかに成り立たないだろうが，少なくとも近似的に石英を使った振動時計†については満足されるであろうし，「原子」時計ではもっと正確に成り立つだろう。量子化された重力場と相互作用を行うすべての場の効果を含むような原子スペクトルの完全な量子論は存在しないから，(1.16）式が非常によい近似で成り立つであろうと推定することが道理にかなっているように見える。けれども重心が自由に落下する原子あるいは分子系に対してさえ，ある場合には（1.16）からの小さなズレを生ずるところの重力場の空間微分のためのある効

† 地上に静止した石英振動子はそれ自身の重さにより圧縮され，人工衛星の中で持ちうる自由落下のときの値とは少し大きさが変わることになる。

果が期待されるかもしれない[†]。赤方偏移についての付加的な議論は第5章に与えられる。

1.5　等価原理についての一層の注意

加速系はある重力場と同等であるから，重力場を適当な加速によって消し去ることができることになる。たとえば重力場の中で自由に落下するエレベーターは重力に関する限り慣性系であるように見える。ある物体はその中で重力場が存在しないかのように運動するであろうし，その物体になされたどんな観察も慣性系とエレベーターの中の空間との間に区別を設けることはできないであろう。

このことがエレベーター内の物体が電気的に帯電している時にも正しいかどうかは明らかでない。一様に加速された点電荷(9)(10)(11)(12)からの可能な輻射についてたくさんの研究がなされてきた。Bondi と Gold, Fulton と Rohrlich はそういう電荷が実際に輻射を発することを予言している。（一様な加速に対する）輻射の反作用はゼロで，エネルギー保存の問題は自巳エネルギーが無限大であることにより複雑である。素粒子の内部構造が正しく考慮されたときには一様な重力場の中を落下するときに荷電粒子は輻射を行ないゼロでない輻射の反作用をうけることが見いだされるかもしれない。そうならば自由に落下する電荷をもつ物体および電荷をもたない物体を観察することにより局所的な測定によってわれわれが慣性系にあるのか重力場の中を自由に落下しているのか区別できるという結論がひき出されるであろう。そのさい等価原理は重力場の方程式だけを定式化するための単なるガイドにすぎず一般的な自然法則ではない。

---

† 原子が自由落下をしているということは重力場から生ずる応力が最小であることを意味する。加速系の中の静止した原子はいまそういう応力によって摂動を受けるかもしれない。これは加速系の中で遂行された実験に対してある観測可能な（そして計算可能な）効果に導くかもしれない。しかしながら C. W. Sherwin (13)を見よ。

文　献

1. R. V. Eötvos, *Math. u. naturw. Ber. Ungarn* 8, 65 (1890) ; *Beibl. Ann. Physik* **15**, 688 (1891) ; *Ann. Phys.* **59**, 354 (1896) ; *Ann. Physik* **68**, 11 (1922).

2. L. Southerns, *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **84**, 325 (1910).

3. P. Zeeman, *Proc. Amsterdam Acad.* **20**, 542 (1917).

4. R. H. Dicke, *Revs. Modern Phys.* **29**, 3, 355 (1957). これは新しい実験を議論しているのではなく，等価原理についての Dicke の考えを述べている。

5. H. Bondi, *Revs. Modern Phys.* **29**, 3, 423 (1957).

6. L. I. Schiff, *Phys. Rev. Letters* **1**, 7, 254 (1958).

7. E. A. Uehling, *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935) ; R. Serber, *Phys. Rev.* **48**, 49 (1935).

8. A. Einstein, *Ann. Physik* **35** (1911).

9. H. Bondi and T. Gold, *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 229**, 416—424 (1955).

10. B. DeWitt and R. W. Brehme, *Annals of Physics* **9**, 220, (1960).

11. D. L. Drukey, *Phys. Rev.* **76**, 543 (1949).

12. T. Fulton and F. Rohrlich, *Annals of Physics* **9**, 499 (1960).

13. C. W. Sherwin, *Phys. Rev.* **120**, 17 (1960).

第2章
特殊相対論の一般化

一般的な自然法則はすべての座標系に対して正しく成り立つ方程式によって表現されるべきである。いいかえればその方程式はどのような座標系の置き換えに対しても共変的である（一般共変）。　　A. Einstein

2.1　共変性の概念

Minkowski は一つの慣性系から相対速度 v で動いている他の慣性系に変換することは4次元の時空座標系の中での座標軸の回転に対応する(1)との重大な発見を行った。特殊相対論の要求は，物理法則を4次元ベクトルの間の関係として書くことによってもっとも優雅な形で満足される。この手続きによって本質的ではないが，美しさと単純さの要素を加味することができる。

われわれは肩につけた添字によってラベルされた座標を用いる。特殊相対論のミンコフスキー空間においては座標，x，y，z および ct を用い，それを x^1，x^2，x^3，x^0 と記す。重要な量はでき事の間の関係である。一つのでき事は空間的あるいは時間的にひろがりを持たない。それは4次元空間における一点である。二つのでき事 a と b の間の間隔を記号 s_{ab} と記し，次式を定義する。

$$s_{\mathrm{ab}}{}^2=(x_{\mathrm{a}}{}^0-x_{\mathrm{b}}{}^0)^2-(x_{\mathrm{a}}{}^1-x_{\mathrm{b}}{}^1)^2-(x_{\mathrm{a}}{}^2-x_{\mathrm{b}}{}^2)^2-(x_{\mathrm{a}}{}^3-x_{\mathrm{b}}{}^3)^2 \quad (2.1)$$

もし一つのミンコフスキー座標系から他のそれへ変換するなら，同じでき事の間の間隔は不変のままに留まり，新しい座標 x'^1，x'^2，x'^3，x'^0 によって

$$(s_{\mathrm{ab}})^2=(x'^0{}_{\mathrm{a}}-x'^0{}_{\mathrm{b}})^2-(x'^1{}_{\mathrm{a}}-x'^1{}_{\mathrm{b}})^2-(x'^2{}_{\mathrm{a}}-x'^2{}_{\mathrm{b}})^2-(x'^3{}_{\mathrm{a}}-x'^3{}_{\mathrm{b}})^2 \quad (2.2)$$

と表される。

s_{ab} のような量の大きさは不変であるが，$x_{\mathrm{a}}{}^1-x_{\mathrm{b}}{}^1$ のような量は一つの群を

構成する座標変換の下で変化する。s_{ab} に対する関係式の形は不変であり，そういう関係は座標変換（ミンコフスキー空間における座標の回転）の群の下で共変であるという。微小間隔だけ離れた二つのでき事の場合には

$$ds^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2 \tag{2.3}$$

2.2 計量テンソル

非常に沢山の和を必要とするので繰り返された指標は和を意味するものと約束することにしよう。このことから（2.3）は次の形に書ける。

$$-ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.4}$$

$g_{\mu\nu}$ の行列要素は

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & +1\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

によって表わされる。$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ，（2.5）式はローレンツ変換の下でその形が保たれローレンツ計量と呼ばれる。

曲線座標では計量テンソルは異なった形をとるが，ユークリッド幾何学が成り立つかぎり空間のどこででも適当な座標変換により計量テンソルを（2.5）の形に変換することができる。

2.3 曲がった空間における計量テンソルと加速系

球の表面上の曲がった2次元空間は2乗した線要素

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$g_{\mu\nu}=\begin{vmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\theta\end{vmatrix} \tag{2.6}$$

によって記述される。

大円の孤からなる三角形はその角度の和が π より大きく 3π より小さい。この非ユークリッド的な曲がった空間の性質は，$g_{\mu\nu}$ の微係数を含む関係式を通

して，計量 (2.6) によって表わされる。どんな座標変換によっても (2.6) をいたるところで対角要素が 1 であるような対角形に変換することはできない。曲率の概念は後でもっと詳しく議論されよう。

いま，慣性系において平面の三角形があると考えよう。もし異なった慣性系から測定するなら，三角形の形は変わるかもしれないが，角度の和は π に留まり幾何は変化しないだろう。

慣性系において円周上に並ぶ点の集合を考えよう。もしその円の中心と一致した中心をもつ回転座標系から観測し同じ点を調べるなら，円周の直径に対する比は長さを測る操作上の手続きに依存することを見いだす。しばらくの間回転系の中で時計を同期させる問題を避けるために，同時刻を定義するための慣性系の時計を用いて点の対を一致させることによって長さが測定されるものと仮定する。回転系の中に静止している測定棒を用いれば円周と半径の比は π を越えるであろう。このことは剛体の測定棒で直径を測れば前と同じ値が得られるだろうが，円周に沿っておかれるときにはローレンツ収縮によって短くなるであろうことから説明される。回転系の計量テンソルは非ユークリッド的な曲がった空間を記述しなければならない。

慣性系においては空間にいたるところで固定され，同期された時計の系を設定することができる。回転系においては異なった半径のところにある時計は，異なった時刻を示すだろう。異なった半径のところにある恒等的な時計は異なった慣性系における恒等的な時計に類似している。それらは同期させることができない。時間座標は回転系の中心にある時計によって放出されたパルスによって測定されると考えよう。回転系の各点にある時計はその点の観測者に対する時間間隔を刻む。これらの間隔とひき続いて到達する光のパルスの受信に相当する時間座標の差の間の関係は，$g_{\mu\nu}$ の g_{00} 成分によって記述されるだろう。これは半径の関数であり，特殊相対論の計量 (2.5) は適用されない†。

重力場と加速された系†† との同等性は特殊相対論が重力場の存在するところ

---

† 回転系に対する適切な計量は

$$-ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2+2\omega r^2d\varphi dt-(c^2-\omega^2r^2)dt^2$$

†† 時計のパラドックスについての幾つかの注意を整理しておこう。 ↗

のひろがった領域(2)の中では成り立たないだろうことを意味する。曲がった空間の計量が必要となる。他の例をとると，辺が光線であるような慣性系の中の三角形を作ったと仮定する。角度の和はπである。もしこれが重力場の中で繰り返されるなら三角形の辺は光子のエネルギーへの重力の作用のために弯曲したものになるだろう。三角形の角度の和はπとは異なってくる。共変的な理論においては，このことは光線の径路が常に測地線であり，曲がった空間の計量が重力場の中では要求されるといい表わすことにより表現される。

操作上は長さと時間の測定を適当に再定義することによってローレンツの計量が常に用いられうることが指摘されている(3)(4)。同様に地球の表面が平担であることに固執することもできる。緯度と経度の関数として測定の演算を適当に定義することにより，ユークリッド幾何学についての内部的な無矛盾性が得られるだろう。これは本書において採用する見地ではない。

↘ 運動する物体の電気力学についての Einstein の最初の論文において，もし二つの恒等的な時計があり，一つは慣性系において静止しておかれ，もう一つの時計を動かして閉じた径路を通って第一の時計の位置に戻すと二つの時計はもはや一致しないことが注目された。いま一組の双生児を考えよう。一人は慣性系に静止しており，他はロケットに乗って出発し，後に戻ってくるものとする。帰ってきた旅行者は家に留まっていた双生児の一人が彼より年とっていることを発見するだろう。Darwin (C. G. Darwin *Nature* **180**, 976 (1957)) はこの問題全体が特殊相対論の枠の中で理解されうることを指摘した。なぜならロケットの加速時間は短く，一様運動の期間は著しく長いとしてよいから。そうすると結果は短い加速時間の間に何が起こったかには依存するはずがない。もし，慣性系の中で静止している双生児の一人に相対的な旅行者の速さがvであるなら

$$t_r = t_m/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

となる。ここでt_rは静止している双生児に対する経過時間，t_mは動いている双生児に対する経過時間である。この結果は特殊相対論からただちに結論される。なぜなら慣性系の中にいつも固定されている双生児の一人の座標系ですべての計算を遂行できるから。加速度を受ける座標系に適当な一般相対論の定式化を用いて，動いている双生児の系で計算しても同じ結果が得られる。(C. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, New York, 1952 を見よ)。それゆえにパラドックスは存在しない。

2.4 一般共変性

もし重力場のみを考えるなら等価原理から，局所的な実験によって，慣性系と重力場の中を自由に落下する座標系の間を区別する可能性は否定される。それゆえに慣性系に特別の意味を与えるための先験的な理由は存在しない。また重力場のいたるところで同期化された時計をもつように要求された系を設定することは可能ではない。これらの理由のために Einstein はすべての座標系は自然の記述のために同様に良いものであり，物理の法則はどの座標系でも同じ形をもつべきであるとの要請に導かれた。これが一般共変性の原理である。

もしこの原理を採用するなら座標はでき事に番号をつけるための簿記の系以上の何ものでもなくなる。一般共変性の原理は正しい方程式を導き出すための有用なガイドであった。ある座標系でのみ簡単に見える原理を避け，任意の座標系で簡単に表現されうるようなものだけを残すべきことをこの原理は教えてくれる。Kretchmann(5)は任意の物理法則は共変な形式に書くことができることを指摘した。結果は通常簡単ではない。Kretchmann はまた，一般共変性の原理が必要な物理的帰結をまったくもたないことも指摘した。それにもかかわらず形式の簡単さプラス共変性の要求は，最終的な解析において実験との比較の基礎の上で立つか倒れるかするに違いない方程式を導くのに価値のあるガイドであった。

曲がった空間における一般共変な方程式の取り扱いはテンソル解析の定式化によって容易とされる。

文献

1. H. Minkowski, address to the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, Cologne, 1908; reprinted in *The Principle of Relativity*, Dover Publications, New York, 1952.
2. A. Einstein, *Ann. Physik* **49**, 769 (1916).
3. N. Rosen, *Phys. Rev.* **57**, 147 (1949).
4. R. H. Dicke, *Revs. Modern Phys.* **29**, 363 (1957).
5. E. Kretschmann, *Ann. Physik* **53**, 575 (1917).

第3章
リーマン幾何学とテンソル解析

曲面の固有の性質は“幾何学者によって熱心に探求されるべきもっとも価値のあるもの”である。 C. F. Gauss

3.1 曲率についてのある考え

ここで $g_{\mu\nu}$ が必ずしも座標変換によっていたるところでローレンツ計量に帰着されないようなもっとも一般的な種類の幾何学が議論されるだろう。

Gauss は次の問題を考えた。2次元の曲面があり，その上に知的な2次元の動物が住んでいるとしよう。彼らは彼らの空間が曲がっているということを決定できるだろうか？　曲面の中だけでなされた測定によって曲率の要素を決定

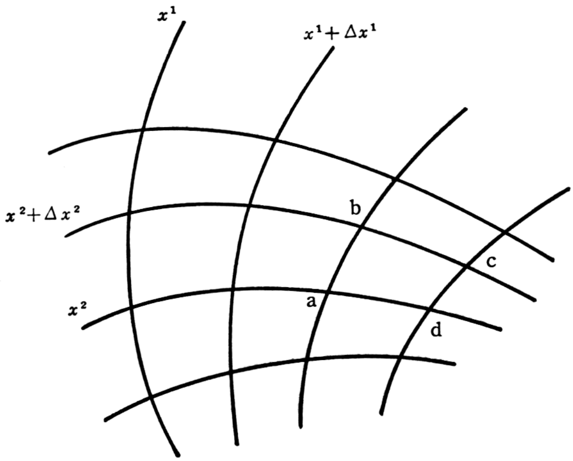


図 3.1

できるか？彼はこのことが実際になされうることをみいだした。第一に曲面上の点を任意ではあるが一定の規則にしたがって番号をつけることから始める。任意の2種類の曲線，x^1＝定数 および x^2＝定数 が座標系である(3.1図)。点aとbとの間の長さの直接測定が g_{22} を与える；同様に長さac, adを測ることによって g_{12} と g_{11} が得られる。Gauss は $g_{\mu\nu}$ とその微係数によって曲率を表すことができる公式を与えた。

曲率は一つの固有な性質で，任意の与えられた点でどんな座標系で測っても同じ値が得られる。われわれは曲率の考えが2次元以上の次元にいかにして拡張できるかを知るだろう。Einstein の重力の理論は空間の曲率を応力とエネルギーの分布に結びつける。これは時空の連続体の性質がエネルギーの分布によって決定されるという意味で，Mach の示唆に部分的に従ったものである。

3.2 異なった種類のテンソルに対する変換則

M個の変数 x^1, x^2, x^3, ……, x^M があるという仮定から出発して議論しよう。これらの変数の特別な値の集合は M 次元の超空間あるいは多様体の中の点とみなされる。その空間はこれらの変数がとることのできる値の領域に相当するすべての点から構成されている。いま点に対する異なったラベル x'^1, x'^2, x'^3, ……, x'^Mを用いると仮定しよう。

$$x'^\alpha = f^\alpha(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^M) \tag{3.1}$$

微係数が存在すると仮定し

$$dx'^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \tag{3.2}$$

と書く。

座標の微分 dx^α は反変ベクトル† の成分であると呼ばれる。同様に量 F^α の集合が変換則

$$F'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} F^\beta \tag{3.3}$$

に従うなら，反変ベクトルであると定義される。いま φ が変数 x^1, x^2, …, x^M

† ベクトルは一階のテンソル，スカラーは0階のテルソルである。

のある関数であるとき $\partial\varphi/\partial x^{\beta}$ のような量を考えよう。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^{\alpha}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \tag{3.4}$$

量 $\partial\varphi/\partial x^{\alpha}$ は (3.3) とは違った変換則に従うことがわかる。

$$K'_{\alpha}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}K_{\beta} \tag{3.5}$$

に従って変換する量の任意の集合は共変† ベクトルとよばれる。

われわれの共変および反変ベクトルの定義は多様体の上で微係数の存在を要求するが計量の存在を要求しないことを注意しよう。共変ベクトルを下の添字で，反変ベクトルを上の添字で表すという表記法を用いよう。

二つの反変ベクトル A^{α} および B^{α} の積は変換則

$$A'^{\alpha}B'^{\beta}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}A^{\nu}B^{\delta} \tag{3.6}$$

を満たすであろう。

変換則 (3.6) に従う量 $T^{\mu\nu}$ の集合は2階の反変テンソルを形成するという。同様に共変2階テンソルは変換則

$$T'_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}T_{\alpha\beta} \tag{3.7}$$

に従う。

任意の階数の混合テンソルは変換則

$$T'^{\mu\nu\cdots}_{\epsilon\eta\cdots}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\epsilon}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\cdots T_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \tag{3.8}$$

ある種の他の量は変換則

$$T'^{\mu\cdots}_{\epsilon\cdots}=J^{W}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\epsilon}}\cdots T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} \tag{3.9}$$

に従う。J はヤコービの行列式 $|\partial x^{\kappa}/\partial x'^{\iota}|$ である。上つきの添字 W は J を

---

† 共変的という言葉は二つの異なった意味をもつ。共変的な理論または方程式はすべての座標系で同じ形式をもつこと。共変的という言葉はテンソルが変換 (3.5) に従うことを意味するときにも使われる。それゆえに共変的な方程式は共変的テンソルと同様に反変テンソルを，またテンソルでない他の量を含むかもしれない。

もち上げる数を表す。$T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ は重み W のテンソル密度であるという。

関数 S がすべての点で，またすべての座標系で，$S=S'$ であるように S' へ変換されるとき不変である，あるいはスカラーであると呼ばれる。

ある量が与えられているときにはいつも，その形によって他の座標系におけるそれを得るための手続きが提供される。それゆえにもし $T_{\mu\nu}=A_\mu B_\nu$ なら，他の座標系では $T'_{\mu\nu}=A_\mu' B_\nu'$ である。

共変ベクトルと反変ベクトルの積 $A_\lambda B^\lambda$ は次のように変換される。

$$A'_\lambda B'^\lambda=\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}A_\mu B^\nu=\delta_\nu{}^\mu A_\mu B^\nu=A_\nu B^\nu \tag{3.10}$$

そこでこの積はスカラーである。高い階数のテンソルに対しても内積（上下の指標の対に関する和）は一つのスカラーであることが結論される。これらの記号はテンソル性を調べるために用いることができる。B^μ を任意の反変テンソル，A_μ をテンソルの性質をもつかどうかわからない量の集合であるとしよう。そのときもし積 $A_\mu B^\mu$ が不変量であるなら A_μ がテンソルであることを示すことができる。なぜなら

$$A_\mu B^\mu=A'_\mu B^\alpha\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \tag{3.11}$$

α や μ のような指標はそれらについて和をとってしまうから，勝手な文字で書いてよい。これは演算を行うときの重要な補助手段である。そこで (3.11) を

$$\left(A_\mu-A'_\mu\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)B^\mu=0 \tag{3.12}$$

とも書くことができる。(3.12) から A_μ が $A_\mu=A'_\nu\partial x'^\nu/\partial x^\mu$ に従って変換することが結論され，したがって A_μ は共変ベクトルである。

$\delta_\mu{}^\nu$ と書かれるクロネッカーのデルタ記号は $\mu=\nu$ なら 1 となり $\mu\neq\nu$ なら 0 を表す量である。もし

$$\delta_\mu{}^\nu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\delta'_\alpha{}^\beta \tag{3.13}$$

と書くなら $\delta_\mu{}^\nu$ は混合テンソルであることは明白である。

もしテンソルが $S^{\mu\nu\alpha}=S^{\nu\mu\alpha}$ なら指標 μ と ν について対称的であるという。

$A^{\alpha\beta\gamma}=-A^{\beta\alpha\gamma}$ ならテンソルは指標 α, β について反対称（あるいは歪対称）であるという。変換則を書き出すことにより，一対の指標が両方とも下つきであるか上つきであるなら座標変換の下でテンソルの対称性が保存されることが明らかになる。一般に対称性は一つの指標が上つき，一つは下つきであるなら保存されない。ゆえに対称性は同じ種類の指標についてだけ有意義である。

任意のテンソル $A^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\delta}$ を

$$A^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\delta}=\frac{1}{2}[A^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\delta}+A^{\nu\mu}{}_{\alpha}{}^{\delta}]+\frac{1}{2}[A^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\delta}-A^{\nu\mu}{}_{\alpha}{}^{\delta}] \tag{3.14}$$

と書くことができる。(3.14) から与えられた上あるいは下の指標の対に対して対称な部分と反対称な部分の和として任意のテンソルを考えることができることがわかる。

変換則から，もし与えられたテンソルのすべての成分がある座標系でゼロとなるならすべての成分はすべての座標系でゼロとなることが結論される。この事実は理論物理学では大きな重要性をもつ。もし法則がテンソル形式，たとえば一つのテンソルが別のテンソルに等しいというような形式に，書かれたとすると二つのテンソルの差はすべての座標系でゼロとなり，法則は用いられる座標系とは独立に成立することになる。同様にもし一つの特別な座標系においてテンソル方程式が確立されたなら，それは一般的に成立する。

スカラーの微係数は共変ベクトルをなすことを見た。他方共変ベクトルの微係数は要求されたテンソルの変換則をもたない。なぜなら

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}A'_\alpha\right)=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta}+A'_\alpha\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma\partial x^\rho} \tag{3.15}$$

共変微分と呼ばれる新しい種類の微分は他のテンソルの微分からテンソルを作ることを可能にする。いかにしてこのことがなされるかをみるためにベクトルの平行移動の概念を考察しなければならない。

3.3 平行移動と共変微分

ベクトルの平行移動のアイディアを曲がった空間に矛盾のない方法で拡張することは可能である。幾何学が一点[†] Pのすぐ近傍においてユークリッド的（あるいはミンコフスキー的）であり，直交座標がその近傍で用いられるような座標系がつねに存在することを仮定する。そういう座標系の中ではベクトルの無限小平行移動のアイディアは単にその成分が一つも変わらないことを意味する。また二つのベクトル A および B のスカラー積 $A_\mu B^\mu$ は平行移動のもとで変わらない。任意の座標に対してある点Pから近傍の点P′まで，ベクトル A_μ の無限小平行移動の操作を，任意のベクトル B^μ とのスカラー積を不変にするものとして定義する。

2次元曲面におけるある与えられた曲線に沿っての平行移動のアイディアは直観的な解釈が与えられる。曲面は展開可能であると考えよう。そのとき曲面を平面上に展開し，その平面の中でベクトルを平行移動できる。それから曲面を巻き戻し，望みの平行移動されたベクトルを得る。もし与えられた曲面が展開可能でないなら，まず平行移動に対する道筋をえらび，それから道筋の各点に接平面を作らなければならない。これらの接平面の包絡面が可展面となるだろう。この新しい可展面は展開されて平行移動とふたたび曲面に巻く操作が遂行される。もしそれに沿って平行移動が遂行されるべき曲線がひょっとして測地線であるなら，それは平面の上に展開されるとき直線となる。そのとき測地線とベクトルの間の角度は平行移動で不変に保たれることは明らかである。二つのベクトルの間の角度も平行移動で一定に保たれる。一つの点から他の点への平行移動の操作は一般にそれらの点の間で指定された道筋に依存することを

---

† $g_{\mu\nu}$ はよく定義された任意の与えられた点において常にローレンツ計量に変換できる。空間は n 次元であると仮定しよう。その点での $g_{\mu\nu}$ は $n(n+1)/2$ 個の数の集まりである。$dx^\alpha = m^\alpha{}_\beta dx'^\beta$ と書き，便宜上 $m^\alpha{}_\beta = m^\beta{}_\alpha$ と仮定しよう。これを ds^2 の中に代入し，$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ とおく。そうすると決定されるべき m と同数の $n(n+1)/2$ 個の方程式が得られる。これを行うために他の方法が存在する。一般にはこれは一つの領域の上で行うことはできない。なぜなら m は数でなく関数となり，方程式 $dx^\alpha = m^\alpha{}_\beta dx'^\beta$ は通常は要求された座標変換を与えるために積分可能ではないであろう。

強調しておこう。

曲がった空間と平坦な空間のどちらでも曲線座標の場合には一つのベクトル A^ν の成分は平行移動の下で変化することが期待される。無限小平行移動に対して δA^ν をこの変化としよう。δA^ν は座標の微分と成分 A^ν の一次関数であるべきである。それは

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta \tag{3.16}$$

と書かれる。量 $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ はその性質がこれから決定されるべき係数である。最初に $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ は α と β について対称であることを示そう。A^ν を座標微分 dx^ν とすると

$$\delta(dx^\nu) = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{3.17}$$

いま，局所的な直交座標系に変換

$$\begin{aligned} x^\alpha &= f^\alpha(x'^1,\ x'^2,\ \cdots) \\ x'^\alpha &= \varphi^\alpha(x^1,\ x^2,\ \cdots) \end{aligned} \tag{3.18}$$

に戻ろう。肩にダッシをつけた座標は局所的な直交座標である。

$$dx^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x'^\beta} dx'^\beta \tag{3.19}$$

定義によって平行移動の下では $\delta(dx'^\beta)=0$ である。そこで (3.19) から

$$\delta(dx^\nu) = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} dx'^\delta dx'^\gamma = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{3.20}$$

と書くことができる。この表式と (3.17) を比較して次式が得られる。

$$\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} \tag{3.21}$$

(3.21) の右辺は明らかに指標 α と β について対称である。したがって $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ はやはり α, β について対称でなければならない。上つきあるいは下つきの指標はテンソルの変換性を与えるために使われることを前に述べた。不幸にして指標の記号法は $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ のように，後でわかることだが，テンソル変換法則に従わない量に対しても用いられる。

もし与えられた点からその近傍にある他のすべての点への平行移動の操作がすべてのベクトルに対して定義されるなら，その点は近傍に擬似的に接続され

ているという。

以前に定義した

$$-ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いることは望ましい。$g_{\mu\nu}$ のテンソル性は，ここで用いるすべての座標変換は曲線の“長さ”を不変にするから，2乗した“長さ”ds^2 の不変性から導かれる。もし $g_{\mu\nu}$ が一つの行列として並べられ，その逆がとられるなら，新しい量 $g^{\alpha\beta}$ が得られ

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha}=\delta_\mu{}^\alpha \tag{3.22}$$

を満たす。クロネッカーのデルタ記号は混合テンソルであるから，$g^{\nu\alpha}$ は反変テンソルであることが導かれる。共変および反変計量テンソルは指標† を上にあげたり下にさげたりして新しい†† テンソルを作るために有用である。すなわち

$$A^\alpha=g^{\nu\alpha}A_\nu \tag{3.23}$$

$\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ に対する公式を計量テンソルによって表そう。平行移動の定義から

$$\begin{aligned}\delta(A_\mu A^\mu)=g_{\mu\nu}(\text{第2の点})[A^\nu+\delta A^\nu][A^\mu+\delta A^\mu]\\ -g_{\mu\nu}(\text{第1の点})A^\nu A^\mu=0\end{aligned} \tag{3.24}$$

これらの演算を遂行して

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}A^\mu A^\nu dx^\alpha+g_{\mu\nu}A^\mu\delta A^\nu+g_{\mu\nu}A^\nu\delta A^\mu=0 \tag{3.25}$$

(3.16) を利用して δA^μ と δA^ν を消去すると

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}-g_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}-g_{\nu\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}=0 \tag{3.26}$$

$\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}$ の下つきの指標に関する対称性から指標 ν と α を入れ替えて

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}-g_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}-g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}=0 \tag{3.27}$$

---

† 任意の座標においては $\delta_{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}\delta_\nu{}^\alpha=g_{\mu\nu}$ であるから $\delta_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ でおきかえられ，また $\delta^{\mu\nu}\to g^{\mu\nu}$ となることに注意。$\mu=\nu$ に対する $\delta_\mu{}^\nu$ だけが1で，$\mu\neq\nu$ に対しては0。

†† 一般に $B_\nu{}^\mu\neq B^\mu{}_\nu$ である。指標の左右の順序はそれらを上下に動かすときに保存されなければならない。

を得る。同様に次式も書ける。

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-g_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}-g_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}=0 \tag{3.28}$$

(3.26)，(3.27) および (3.28) を解くと，(3.22) の助けによって

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha}=\frac{1}{2}g^{\gamma\nu}\left[\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}\right] \tag{3.29}$$

三つの指標をもつ量

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}\right]=\Gamma_{\nu,\mu\alpha}$$

は第一種のクリストッフェルの記号と呼ばれ，$[\mu\alpha,\ \nu]$ と記される。$\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha}$ は第二種のクリストッフェルの記号と呼ばれ，しばしば $\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \mu\alpha\end{matrix}\right\}$ と書かれる。前に注意したように $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ はテンソルの成分ではない。$g_{\mu\nu}$ に対する微分変換則から出発して $[\mu\alpha,\ \nu]$ が

$$[\mu\alpha,\ \nu]'=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}}[\beta\gamma,\ \delta]+g_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\alpha}} \tag{3.30}$$

に従って変換することを示すのは困難ではない。$g^{\alpha\beta}$ に対する変換則を利用して $\Gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}$ に対する変換則

$$\Gamma'^{\delta}{}_{\beta\nu}=\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\kappa}+\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\nu}} \tag{3.31}$$

へ導かれる。

(3.31) を調べてみるとすべてのクリストッフェル記号が一点で0になるような座標系をえらぶことが常に可能であることが示される。これを行うための一つの方法は次の通りである。与えれた点がPと名前をつけられ，クリストッフェル記号はそこで0でないと考えよう。座標変換

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}-x^{\alpha}{}_{(\mathrm{P})}+\frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta(\mathrm{P})}(x^{\beta}-x^{\beta}{}_{(\mathrm{P})})(x^{\delta}-x^{\delta}{}_{(\mathrm{P})}) \tag{3.32}$$

を遂行しよう。

ここで下つきの添字（P）は点Pにおける値を表す。(3.31) を利用して直接

に$\Gamma'_{\kappa\mu}$の新しい値を計算すると，新しい値は点Pで0になることが示される。このことは，クリストッフェル記号が無限大でない場所ではどこでも（3.32）が常に遂行できるから，クリストッフェル記号は変換して消し去ることがきることの証明を構成する。クリストッフェル記号が点Pで0となるような座標系を測地座標系と呼ぶ：Pは極であると呼ばれる。また一つの曲線に沿ってクリストッフェル記号を変換して消すこともまた可能である(4)。

われわれの主な目的，微分により新しいテンソルを作ることに戻ろう。前に見たようにあるベクトルの偏微分はテンソルではない。新しい種類の微係数は次のように作られる。ある与えられた点におけるベクトルを A^μ としよう。隣接した点においてベクトルは $A^\mu+dA^\mu$ である。近傍の点への平行移動から生ずるベクトルは $A^\mu+\delta A^\mu$ である。これらの量をひき算して

$$dA^\mu-\delta A^\mu=\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha}A^\alpha\right)dx^\sigma \tag{3.33}$$

（3.33）は同じ点における二つのベクトルの差であるから一つのベクトルであることが期待されるであろう。量

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha}A^\alpha$$

は A^μ の共変微分と呼ばれる混合テンソルであって

$$A^\mu{}_{;\sigma}=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha}A^\alpha \tag{3.34}$$

と書かれる。

$\delta(A_\mu A^\mu)=0$ から，（3.16）を用いて

$$\delta A_\mu=\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}A_\alpha dx^\beta \tag{3.16a}$$

がわかる。これから（3.33）と（3.34）のそれと同様な手続きによって A_μ の共変微分を

$$A_{\mu;\sigma}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma}A_\alpha \tag{3.35}$$

と書ける。

（3.34）と（3.35）のテンソルとしての性質は，（3.31）を使って，要求された変換則に従うことを示すことにより形式的に確立することができる。反変微

分は指標を上にあげて得られ

$$A^{\mu;\sigma}=g^{\sigma\alpha}A^{\mu}{}_{;\alpha} \tag{3.36}$$

と記される。

2階テンソル $C_{\beta\delta}$ の共変微分は，任意の A^{β} と B^{δ} に対して $C_{\beta\gamma}A^{\beta}B^{\delta}$ が平行移動の際に不変に留まるという要求から，得ることができる。$\delta(C_{\beta\delta}A^{\beta}B^{\delta})$ を0に等しいとおいて $\delta C_{\beta\delta}$ が得られ，共変微分は

$$C_{\beta\delta;\rho}=\frac{\partial C_{\beta\delta}}{\partial x^{\rho}}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho}C_{\delta\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\rho}C_{\beta\alpha} \tag{3.37}$$

と書かれてよい。同様に

$$C^{\beta\delta}{}_{;\rho}=\frac{\partial C^{\beta\delta}}{\partial x^{\rho}}+\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\rho}C^{\alpha\delta}+\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\rho}C^{\beta\alpha} \tag{3.38}$$

$$C^{\beta}{}_{\delta;\rho}=\frac{\partial C^{\beta}{}_{\delta}}{\partial x_{\rho}}+\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\rho}C^{\alpha}{}_{\delta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\rho}C^{\beta}{}_{\alpha} \tag{3.39}$$

高い階数のテンソルへの拡張は明らかであろう。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分を考えよう。これは一つのテンソルである。測地座標においてこのテンソルのすべての成分はゼロでなければならない。そこで

$$g_{\mu\nu;\sigma}=0 \tag{3.40}$$

がすべての他の座標系でも成り立つことが結論される。

3.4　曲率テンソル

以前にもし座標変換によって計量テンソルがいたるところでローレンツ計量に変換することができる場合には，空間の領域は平担であるということを注意した。与えられたベクトルはそういう空間の中でどこでも平行移動してよく，一定ベクトルの場を与える。閉じた径路のまわりに平行移動すると，はじめのベクトルとまったく同じベクトルを生ずる。曲がった空間では閉じた径路に沿って平行移動すると一般に始めのベクトルに一致しない。たとえば球表面(3.2図)の上で測地曲線から成る球三角形を考えてみよう。ベクトル $\boldsymbol{A}$ をもって出発し，その上で平行に移動する。それは $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ となり最後に $\boldsymbol{D}$ となる。

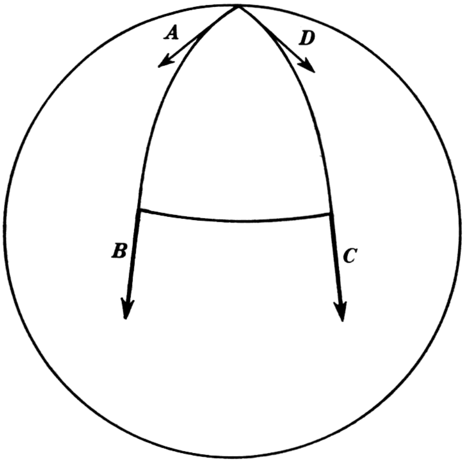


図 3.2

明らかに $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{D}$ は同一ではない。そこで二つのパラメターの集合

$$x^{\alpha}=f^{\alpha}(u,\ v) \tag{3.41}$$

の4個の曲線によって定義された無限小の閉径路のまわりの平行移動による一つのベクトル の成分の変化を計算 してみよう。 考慮される径路は3.3図の中で斜線を入れて示され，その辺は v が一定のとき Δu，u が一定のとき Δv である。閉径路全体に対する n^{μ} の変化は

$$\delta n^{\mu}=-\oint \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} n^{\alpha} dx^{\beta} \tag{3.42}$$

である。"平行四辺形" の向かい合った辺からの寄与の代数和を考え，Δu および Δv の1次の項のみを残すと

$$\delta n^{\mu}=\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} n^{\alpha})\Delta v \frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\Delta u-\frac{\partial}{\partial u}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} n^{\alpha})\Delta u \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}\Delta v \tag{3.43}$$

が得られる。

平行移動の下での n^{α} の変化に対する表示を使って，(3.43) に示された演算を遂行する。結果はそのとき次の形に配列される。

$$\delta n^{\mu}=-\left[\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\right] n^{\alpha}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\Delta u \Delta v \tag{3.44}$$

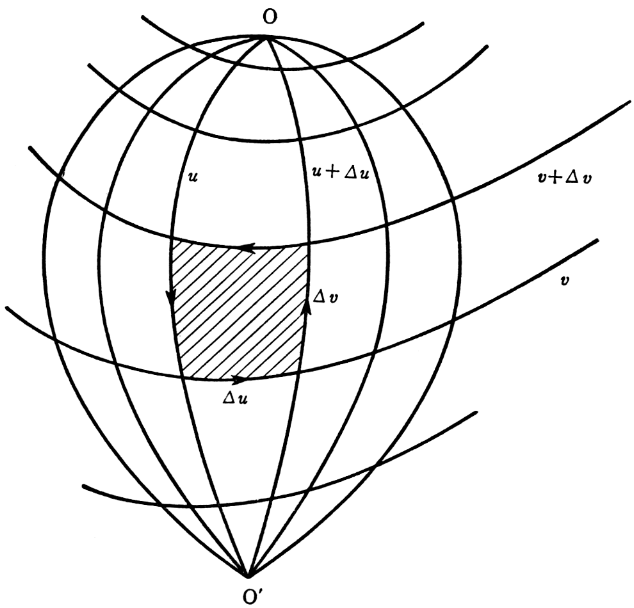


図　3.3

単に1次の項のみが残されたから，(3. 44) から

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\delta n^{\mu}}{\Delta v\Delta u}=-\left[\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\right]n^{\alpha}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u} \tag{3. 45}$$

と書く方が正確である。

(3. 45) の左辺はベクトルである。u および v はパラメターであるから $\partial x^{\beta}/\partial u$, $\partial x^{\gamma}/\partial v$ はベクトルである。そこで次式で定義された量 $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}}+\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} \tag{3. 46}$$

はテンソルであることが結論される。これをリーマン・クリストッフェルのテ

ンソルあるいは単に曲率テンソルと呼ぶ。無限小閉径路に対しては，そのとき†,

$$\delta n^{\mu}=-R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}n^{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}dudv \tag{3.47}$$

平行移動に対して $\delta(n_{\mu}n^{\mu})$ は0となる。このことから

$$\delta n_{\mu}=R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma}n_{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}dudv \tag{3.47a}$$

が導かれる。(3.47) と (3.47a) とから，任意の有限の閉じた†† 径路（u および v についての積分を要求する）に対して $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ が0となることは任意のベクトルが平行移動の下で変化しないことを保証することがわかる。

与えられた領域の中でのローレンツ計量の場合には $g_{\mu\nu}$ が定数であるために曲率テンソルは0となる。もし座標変換がそういう空間の中で遂行されるなら，$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ の変換された成分はテンソル性の帰結としてやはり0となるだろ

---

† この議論は二つの共変微分の結果が一般的にそれらが遂行される順序に依存することを意味する。(3.47) と (3.47a) とから

$$B^{\mu}{}_{;\alpha;\beta}-B^{\mu}{}_{;\beta;\alpha}=-B^{\nu}R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$$

$$B_{\mu;\alpha;\beta}-B_{\mu;\beta;\alpha}=B_{\nu}R^{\nu}{}_{\mu\alpha\beta}$$

が導かれる。

†† n^{α} が平行移動したベクトルであるから，与えられた経路の中の任意の点でのその値はとられる径路に依存する。(3.3) 図に示されるようなパラメター化を遂行することによって (3.47) あるいは (3.47a) の積分に意味が与えられるうる。最初の点がOであると考えよう。n^{α} をOからO′ へすべての与えられた曲線に沿って平行移動しよう。これは連続的なベクトル場を生ずる。そのとき (3.47) が0になることはOに戻る（境界の）径路に沿って平行移動されるとき n^{α} に変化がないことを保証する。全体を見るためには (3.16) のみを用いてもよい。与えられた径路に対して，(3.16) は

$$\frac{dA^{\mu}}{ds}=-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}A^{\alpha}\frac{dx^{\beta}}{ds}$$

と書いてよい。これは接線ベクトル dx^{β}/ds が道筋を指定することによって規定されるかぎり A^{μ} を決定するための方程式の集合である。もし A^{μ} の変化がすべての閉じた径路に対して0になるはずであるなら，量 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}A^{\alpha}dx^{\beta}$ は正確な微分の形でなければならず，このことは

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}A^{\alpha})=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}A^{\alpha})$$

に導く。A^{α} が平行移動されているという条件をつけてこれを評価すると (3.46) の右辺がゼロにならなければならないという要求が得られる。

う。空間が平担であるための必要条件は $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ が0となることが結論される。他方，もし $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ がいたるところで0となるなら，ローレンツ計量が（ミンコフスキー）座標軸の平行移動によって生ずる。なぜならこの操作は一義的であり，径路とは独立であるからである。任意のベクトルの成分はどこでも平行移動によって変化しないだろう。すべてのクリストッフェル記号はいたるところで0となり計量のすべての一次微係数はいたるところで0となるだろう。計量は出発点においてローレンツ計量であったから，いたるところでローレンツ計量であることは明らかである。そこで空間が平担であるための必要十分条件は $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ のすべての成分が0になることが導かれる。また $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ が0になることは方程式の集合（3.16）の積分可能性を保証することも明白である。

表式（3.46）は$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$が指標$\beta$と$\gamma$について反対称であることを語っている。テンソル $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ は次式で与えられる†。

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=g_{\mu\delta}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\beta}}\right)$$
$$+g_{\mu\nu}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\delta\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\nu}{}_{\delta\beta}) \tag{3.48}$$

（3.48）から次式が導かれる。

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-R_{\alpha\delta\gamma\beta}=R_{\beta\gamma\alpha\delta} \tag{3.49}$$

（3.48）と（3.49）から

$$\begin{aligned}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}+R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma}+R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta}&=0\\ R_{\alpha\beta\gamma\delta}+R_{\alpha\delta\beta\gamma}+R_{\alpha\gamma\delta\beta}&=0\end{aligned} \tag{3.50}$$

が証明できる。

3.5　ビアンキの恒等式

いま重要な微分恒等式を証明することができる。ある点において測地座標系

---

†　（3.48）は $g_{\mu\delta}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ を書き出して

$$g_{\mu\delta}\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}=\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(g_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta})-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$g_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=[\alpha\beta,\ \delta]\quad \text{および}\quad \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\gamma}}=[\mu\gamma,\ \delta]+[\delta\gamma,\ \mu]$$

を注意することによって再配列されうる。

をえらぼう。そのときクリストッフェル記号は0となり，$R^{\mu}{}_{\delta\beta\gamma}$ の共変微分は

$$R^{\mu}{}_{\delta\beta\gamma;\nu}=\frac{\partial^2\Gamma^{\mu}{}_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2\Gamma^{\mu}{}_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\nu}} \tag{3.51}$$

となる。(3.51) から

$$R^{\mu}{}_{\delta\beta\gamma;\nu}+R^{\mu}{}_{\delta\nu\beta;\gamma}+R^{\mu}{}_{\delta\gamma\nu;\beta}=0 \tag{3.52}$$

が出てくる。

(3.52) の右辺は，特別な座標系で計算しすべての成分がゼロであることがわかったテンソルである。そこでその結果はすべての他の座標系でも成り立たねばならない。関係式 (3.52) はビアンキの恒等式として知られている。

2次または高次の混合テンソルは1個の上つきおよび1個の下つきの指標について和を取るとき2階低いテンソルができあがる。この操作を縮約という。テンソル $R_{\mu\nu}$ は $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ を縮約して作られる。

$$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha} \tag{3.53}$$

これをリッチのテンソルと呼ぶ†。その対称性は明らかである。$R_{\mu\nu}$ を縮約して

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=R \tag{3.54}$$

に従ってスカラー量を作ると，これは曲率スカラー†† と呼ばれる。

(3.52) に $g^{\delta\beta}\delta_{\mu}{}^{\gamma}$ をかけると

$$g^{\delta\beta}[R^{\gamma}{}_{\delta\beta\gamma;\nu}+R^{\gamma}{}_{\delta\nu\beta;\gamma}+R^{\gamma}{}_{\delta\gamma\nu;\beta}]=0 \tag{3.55}$$

が得られる。

$g^{\delta\beta}$ の共変微分は0である。(3.46) からも $R^{\nu}{}_{\delta\beta\gamma}=-R^{\nu}{}_{\delta\gamma\beta}$ が得られる。(3.55) 式はそのとき

---

† 第1および第2の指標について縮約するとゼロとなる。なぜなら $R^{\alpha}{}_{\alpha\beta\gamma}=g^{\iota\kappa}R_{\iota\kappa\beta\gamma}$ であって，$R_{\iota\kappa\beta\gamma}$ は ι と κ についての反対称であるからこれはゼロとなる。第1と第4の指標についての縮約は (3.53) を負にした量を与える。

†† 2次元空間では任意の与えられた点において次の関係が成立つ。

$$\frac{R_{1212}}{g}=\frac{R}{2}=\frac{1}{r_1r_2}=\lim_{s\to 0}\frac{\Delta\theta}{S}$$

ここで g は $g_{\mu\nu}$ の行列式，r_1 および r_2 は曲率の主半径，S はその点の小さい測地線四辺形の面積，$\Delta\theta$ はその角の和が4直角を越える値を表す。

$$\left(R_{\gamma}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\gamma}{}^{\nu}R\right)_{;\nu}=G_{\gamma}{}^{\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{3.56}$$

と書くこともできる。(3.56) は縮約されたビアンキ恒等式である。テンソル $G_{\gamma}{}^{\nu}=R_{\gamma}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\gamma}{}^{\nu}R$ をアインシュタインのテンソルという。

3.6 測　地　線

曲線の線要素がそれに隣り合った線要素の平行移動であるという要求によって定義された曲線の方程式はどんなものかという問題を考えてみよう。任意の曲線の方程式は1個のパラメターをもつ点の集まりで

$$x^{\alpha}=f^{\alpha}(s) \tag{3.57}$$

である。

接線ベクトルは dx^{α}/ds であり，平行移動によって生ずる新しい接線ベクトルは

$$T'^{\rho}=\frac{dx^{\rho}}{ds}-\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}dx^{\beta} \tag{3.58}$$

である。

新しい接線ベクトル T'^{ρ} は次式でも表すことができる。

$$T'^{\rho}=\frac{dx^{\rho}}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^{\rho}}{ds}\right)ds \tag{3.59}$$

(3.58) と (3.59) を等しいとおくと，その線要素が先行する線要素の平行移動であるような曲線の方程式

$$\frac{d^2x^{\rho}}{ds^2}+\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0 \tag{3.60}$$

が得られる。

予期されるように (3.60) は測地曲線と呼ばれる長さが極値になっている曲線の方程式を表している。これを示すために積分

$$\int ds=\int\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} \tag{3.61}$$

が停留値をもつために満足されなければならない方程式を求めよう。

パラメーターkを導入し

$$\int ds=\int\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dk}\frac{dx^{\nu}}{dk}}\,dk \tag{3.62}$$

と書く。

$$L^2=-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dk}\frac{dx^{\nu}}{dk} \tag{3.63}$$

とおこう。(3.61) に対する停留値の条件は

$$\delta\int Ldk=0 \tag{3.64}$$

となる†。kは測地線に沿っての長さsであるように選ぶことができる。それは他の曲線の場合には長さではない。

したがって (3.64) は

$$\delta\int Lds=\int\left[\frac{\partial L}{\partial x^{\iota}}\delta x^{\iota}+\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{dx^{\iota}}{ds}\right)}\delta\left(\frac{dx^{\iota}}{ds}\right)\right]ds \tag{3.65}$$

被積分関数の第2項は次の2項として書くことができる。

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{dx^{\iota}}{ds}\right)}\delta x^{\iota}\right)-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial x^{\iota}}{\partial s}\right)}\right)\delta x^{\iota}$$

この第1項は積分をしたとき，積分の上下限で変分はゼロであるから，何の寄与もない。この問題に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{dx^{\iota}}{ds}\right)}-\frac{\partial L}{\partial x^{\iota}}=0 \tag{3.66}$$

である。測地線に沿って $L=1$ であることに注意しよう。(3.63) を利用して

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{dx^{\kappa}}{ds}\right)}=-\left[\frac{dg_{\kappa\nu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}+g_{\kappa\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2}\right];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\kappa}}=-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}/2$$

---

† ここでδは一つの可能な径路から別のものに移ったときに座標とベクトルdx^{ι}/dkの変化に対応する変分を意味する；kは単に異なった径路の上での対応する点に名前をつける。

が得られ，(3.66) は

$$g_{\kappa\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}-\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}-\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu}\right]\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$$

$$=g_{\kappa\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right]\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0 \qquad (3.67)$$

となる。

(3.67) に $g^{\kappa\alpha}$ をかけ，和をとると測地方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0 \qquad (3.68)$$

が導かれる。(3.68) と (3.60) は同一である。

もし光の伝播を取り扱うときには零測地線を得る。上に述べたような導き方はこの場合にはいたるところで ds が0だから適用されない。明らかに(3.60)に導く議論はそのまま成り立つ。そこで変数 s を長さ以外の測地線に沿うパラメターであるとの重要な約束の下で，零測地線の場合にも測地方程式は適切なものであるとして定義して矛盾はない。

3.7 いくつかの有用な計算上の補助

この節を完結するためにテンソル量の扱い方についてのたくさんの有用な補助手段を述べよう。第一に共変発散 $A^\mu{}_{;\mu}$ を考える。

$$A^\mu{}_{;\mu}=\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}A^\alpha \qquad (3.69)$$

(3.29) から

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \qquad (3.70)$$

が得られる。

(3.70) は $g_{\mu\nu}$ の行列式で書くことができて，それを g と記す。行列式を展開する規則から

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=\Delta^{\mu\nu} \qquad (3.71)$$

という関係式に導かれる。

(3.71) の中で $\Delta^{\mu\nu}$ は元 $g_{\mu\nu}$ の余因子である。行列式の逆を得るための規則および $g^{\mu\nu}$ の定義から，(3.71) は

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=gg^{\mu\nu} \tag{3.72}$$

$$dg=gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}=-gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \tag{3.72a}$$

と書いてよい。(3.72a) の一番右の表式は $d(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu})=0$ から得られる。そこで

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}=gg^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}=-gg_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{3.73}$$

が得られる。(3.73) を使うと (3.70) を

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}=-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln\sqrt{-g}) \tag{3.74}$$

の形に書くことが可能になる。

式 (3.74) は共変発散 (3.69) を

$$A^\mu{}_{;\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(A^\mu\sqrt{-g}) \tag{3.75}$$

と書くために用いられる。2階の反変テンソルの場合には，(3.38) と (3.74) が

$$C^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(C^{\alpha\beta}\sqrt{-g})+\Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma}C^{\beta\sigma} \tag{3.76}$$

を与え，混合テンソルの場合には (3.39) は

$$C_\alpha{}^\beta{}_{;\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(C_\alpha{}^\beta\sqrt{-g})-\Gamma^\beta{}_{\alpha\sigma}C_\beta{}^\sigma \tag{3.77}$$

に導く。反対称テンソル $F^{\alpha\beta}$ に対して (3.76) の最後の項は0となり，共変発散は

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) \tag{3.78}$$

となる。対称テンソル $S^{\alpha\beta}$ の場合には (3.77) の最後の項を再配列して

$$S_\alpha{}^\beta{}_{;\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(S_\alpha{}^\beta\sqrt{-g})-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}S^{\mu\nu} \tag{3.79}$$

が得られる。

レヴィ・チヴィタの記号 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ がしばしば計算を遂行するのに役に立つ。それは四つの指標のどれか二つが等しいとき $\varepsilon=0$ であるとの供述によって定義される。任意の指標の対を交換すると符号が変わり，また $\varepsilon_{0123}=1$ である。テンソル $K_{\mu\nu}$ の行列式 K の展開を表現する便利な方法は

$$K\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu}K_{\iota\alpha}K_{\kappa\beta}K_{\lambda\gamma}K_{\mu\delta} \tag{3.80}$$

である。

変換則

$$K_{\mu\nu}=\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}K'_{\alpha\beta}$$

は (3.80) の中に用いてよく，結果は再配列をした後，行列式 (K) と (K') は

$$K'=\left[J\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right]^2 K \tag{3.81}$$

の関係にあることが示される。(3,80)，(3.81) を用いて $K_{\mu\nu}$ に対する変換則は

$$\varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta}=\left(J\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right)^{-1}\frac{\partial x^{\iota}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\delta}}\varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu} \tag{3.82}$$

を与える。(3.82) は $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ が重み -1 をもつテンソル密度であることを語っている。同様にして $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は重み $+1$ をもつテンソル密度† であることが示される。この取り扱いでは，もし ε が与えられた空間におけるテンソル密度であるとすれば，ε の指標の全数がその空間の次元数に等しいことが要求されることに注目しよう。$K_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ として (3.81) から $g_{\mu\nu}'$ の行列式は $g_{\alpha\beta}$ のそれと

$$(-g')^{\frac{1}{2}}=J\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)(-g)^{\frac{1}{2}} \tag{3.83}$$

によって関係づけられることが結論される。

4次元の体積要素 d^4x' はヤコービの規則

$$d^4x=J\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)d^4x' \tag{3.84}$$

にしたがって d^4x に関係している。(3.83) と (3.84) を結合して

---

† $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ と $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ が異なる重みをもつから計量テンソルは ε の指標を上下するために用いることができない。

$$\sqrt{-g}\,d^4x=\sqrt{-g'}\,d^4x' \tag{3.85}$$

が得られ，量 $\sqrt{-g}$ は不変量であることがわかる。

3.8 長さの測定

座標と区間を取り扱ってきた。特殊相対論では長さもまた取り扱う。与えられたローレンツ座標系に静止した棒はよく定義された長さをもつ。棒の端の世界線は時間軸に平行である。座標 x'^{α} をもつ別のローレンツ系での長さの増加は

$$(\varDelta x'^1)^2+(\varDelta x'^2)^2+(\varDelta x'^3)^2 \tag{3.86}$$

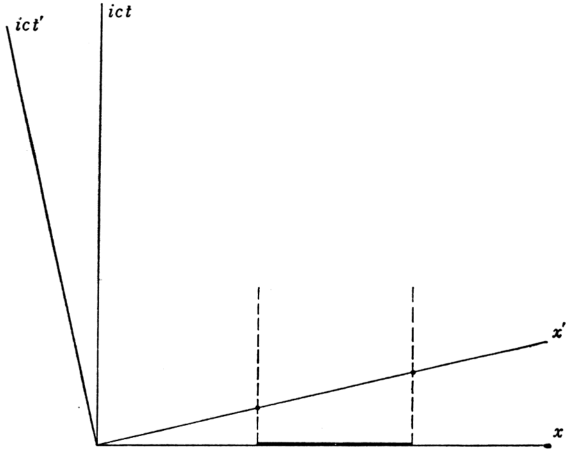


図 3.4

で与えられる。$\varDelta x'^1$ は超平面 x'^0＝定数が棒の端の世界線と交わる（3.4図をみよ）2点における x'^1 座標の差を表す。もしわれわれが一対のでき事をもつとしたら，仕方を変えて各時空点を超平面 x'^0＝定数の上に垂直に射影し，ふたたび（3.86）を用いる。

曲がった空間でも同様にして長さを定義できる。計量を $g_{\mu\nu}$，座標を x^0，x^1，x^2，x^3 と記そう。与えられた点で座標 x'^0，x'^1，x'^2，x'^3 をもつ局所ローレンツ系を導入しよう。x'^0 は x^0 と平行としよう。そうすると

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0}=0; \qquad \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\neq 0$$

指標 i は空間座標を表す。一対のでき事に対し

$$dl^2=dx'^i dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^i}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.87}$$

を定義する*。計量テンソルに対する変換則は

$$\begin{gathered} g_{jk}=\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}-\frac{\partial x'^0}{\partial x^j}\frac{\partial x'^0}{\partial x^k} \\ g_{00}=-\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}; \qquad g_{0j}=-\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\frac{\partial x'^0}{\partial x^j} \end{gathered} \tag{3.88}$$

と書かれる。(3.88) を (3.87) の中に使うこと

$$dl^2=\left(g_{jk}-\frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}}\right)dx^j dx^k=\gamma_{jk}dx^j dx^k \tag{3.89}$$

ただし γ_{jk} は

$$\gamma_{jk}=\left(g_{jk}-\frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}}\right) \tag{3.90}$$

によって定義される。γ_{jk} は3行3列の行列 g^{jk} の逆であることが示される†。$g_{\mu\nu}$（4行4列）の行列式は γ_{jk} の（3行3列）行列式と，次式に従って†† 関係づけられる。

$$g=g_{00}\gamma \tag{3.91}$$

一対のでき事に対して同様に局所的ローレンツ座標系の中でその値による時間微分を

---

* （訳者註）(3.87) は $i=1,2,3$ について和をとるものとする。

† $g^{ij}g_{jk}+g^{i0}g_{0k}=\delta_i{}^k; \qquad g^{ij}g_{j0}+g^{i0}g_{00}=0$ と書こう。
そのとき g^{i0} を消去して $g^{ij}\gamma_{jk}=\delta_i{}^k$ を得る。

†† 第一に

$$\gamma=\frac{1}{g_{00}}\begin{vmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ g_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ g_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ g_{30} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}$$

第1列の g_{10}/g_{00} 倍に第2列に加えよ。第3と第4列を含む同様の操作により (3.91) に導かれる。

$$(dx'^0)^2 = dl^2 - g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

として定義してよい。(3.89) を用いて平方根をひき算すると

$$dx'^0 = (-g_{00})^{\frac{1}{2}}dx^0 - (-g_{00})^{-\frac{1}{2}}g_{0i}dx^i$$

が得られる。

3.9 計量テンソルの決定

もしたわむことができる（しかし伸縮しない）棒と不変な時間間隔を刻む“自然”の時計をもっているなら，既知の座標をもつ適当にえらばれたでき事の対を用いて，直接の測定によって与えられた点の $g_{\mu\nu}$ を知るためにこれらを用いることができる。剛体の棒は実在しないが，しかし普通のものでも完全な剛体からのずれが計算可能であるなら用いてよい。

もう一つの手続きは局所ローレンツ系を作り，はじめの座標系とローレンツ系の両方におけるでき事のもつ座標の知識を利用する。2乗した長さはローレンツ系にある棒をもって測定できる。剛体でないことに対する補正は棒が自由落下しており応力がかかっていないから必要ない。六対のでき事の測定によって (3.89) を用いて γ_{ij} を計算することが可能になる。

はじめの時間座標はラジオ信号を受信することによって確定されるものと考え，そうして $g_{\mu\nu}$ を測りたい与えられた点においてセシューム・ビーム時計をもっているとしよう。時間信号との比較が g_{00} を与える。g_{01} を決定するために，x^1 座標のみが異なる2点にラジオ受信機を配置する。そのとき一つの受信機から他のものに輻射のパルスを送るように用意しておき時間座標のシグナルによって到着時刻を測定する。

$$ds^2 = 0 = g_{11}[dx^1]^2 + 2g_{10}dx^0dx^1 + g_{00}[dx^0]^2 \tag{3.92}$$

(3.89) から

$$(dl^1)^2 = \left(g_{11} - \frac{(g_{01})^2}{g_{00}}\right)[dx^1]^2 \tag{3.93}$$

をもつ。(3.93) はその際 (3.92) から g_{11} を消去するために用いられ

$$(dl^1)^2 + \frac{(g_{01})^2[dx^1]^2}{g_{00}} + 2g_{10}dx^0dx^1 + g_{00}[dx^0]^2 = 0 \tag{3.94}$$

を得る。(3.94) の中のすべての量は g_{01} を除いて知られた量であり，したがってこの式から g_{01} が決定される。同様に g_{02} や g_{03} が決まる。これらの量の知識および γ_{ij} が測定されたという事実から $g_{\mu\nu}$ のすべての残りの成分が得られる。

文 献

1. T. Levi Civita, *The Absolute Differential Calculus*, Blackie and Son, London, 1927.
2. J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus*, University of Toronto Press, 1952.
3. B. Spain, *Tensor Calculus*, Interscience, New York, 1953.
4. E.Fermi, *Atti accad. nazl. Lincei* **31**, 21, 51 (1922).

第4章
一般相対論の場の方程式と電磁気学

重力は他の力，特に電磁気的な力に対して例外的な地位を占めている。なぜなら重力場を表す10個の関数が同時に，測定される空間の計量的性質を定義するから。

A. Einstein

4.1 重力場の方程式

第2章において回転座標系を議論した。加速度の結果としてリーマン計量が必要とされた。一様でない重力場は，各小領域の中では，適当な加速系に同等である。リーマン計量はしたがって重力場の記述を与えることも期待されよう。線要素の2乗は

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (4.1)$$

で与えられる。

われわれは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を重力場と同定する。等価原理から出てきたこの同定は，おそらく一般相対論の最も重要な新しい特徴である。いま問題は $g_{\mu\nu}$ と物質エネルギーの分布を結びつける微分方程式を定式化することである。出発点は，重力ポテンシャル φ に対するポアソン方程式によって

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho_M \qquad (4.2)$$

として記述されるところの，重力のニュートンの法則である。G は重力定数で ρ_M は単位体積あたりの質量である。

(4.2) の左辺は

$$\Box\varphi = 4\pi G\rho_M \qquad (4.3)$$

と書くことにより少なくともローレンツ不変な形にすることができる。

(4.3) は電気力学における4元ポテンシャルに対する方程式の集まりと類似

している。そこでは電荷密度は全電荷の不変性の帰結として4元ベクトルの1成分である。しかしながら質量は不変量ではなく，そこで(4.3)の右辺は4元ベクトルの1成分ではない。それは特殊相対論からすでに知られている2階の応力エネルギーテンソルの成分の一つである。この2階のテンソル性が電気力学よりもっと複雑な理論に導く。また重力場に結びついた質量0の粒子すなわち重力子はふたたび重力の“ポテンシャル” $g_{\mu\nu}$ の2階のテンソル性の結果により，スピン2を持つだろう。

われわれは保存則があることを思い出す。非相対論的な力学における流体に対して質量の保存は連続方程式

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i}+c\frac{\partial \rho_M}{\partial x^0}=0 \tag{4.4}$$

によって表現される。

v^i は速さであり，i についての和は3個の空間座標を含む。(4.4) は $dx^1dx^2dx^3$ を掛けて与えられた体積の上で積分することができる。最初の3項は容易にその体積を囲む閉じた曲面の上の積分に変換される。そこで結果は積分領域の中の全質量の時間微係数は曲面を通って運び込まれる質量に等しいことになる。

(4.4) の特殊相対論的な一般化は

$$\frac{\partial T_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu}=0 \tag{4.5}$$

であり，$T_\mu{}^\nu$ は応力エネルギー・テンソルである。

本書の残りでは通常演算 $\partial/\partial x^\alpha$ を α の前にコンマをつけた記号で示すことにしよう。それゆえに (4.5) は $T_\mu{}^\nu{}_{,\nu}=0$ と書かれる。

特殊相対論的場の理論では，場の変数 q^α とその1次微係数 $q^\alpha{}_{,\beta}$ の関数であると仮定されるところのラグランジュアン密度 L から $T_{\mu\nu}$ を得るための手続きが利用可能である。作用関数は L/c の4元体積積分であり，停留作用の原理は，境界上で0になる場の変数の変分に対して

$$\delta\int Ld^4x=0 \tag{4.6}$$

であることを意味する。

ここで記号δは通常の意味に用いられる。場の変数q^αと$q^\alpha{}_{,\beta}$はパラメターの関数であることが仮定される。もしパラメターがkであるなら，δは$dk(\partial/\partial k)$を意味し，ここで$\partial/\partial k$はx^μを一定にしておいてkで微分することを意味する。それゆえに座標とkに関する微分の順序は交換されてよい。(4.6) は次式に書ける。

$$
\begin{aligned}
0=\delta\int Ld^4x &= \int\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha+\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}}\delta q^\alpha{}_{,\gamma}\right)d^4x \\
&= \int\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}}\right)\delta q^\alpha d^4x+\int\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\beta}}\delta q^\alpha\right)d^4x
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

(4.7) の右辺の最後の項は表面積分の形に書かれ，それは領域の境界でδq^αが0になることが仮定されるからゼロとなる。(4.7) は任意の変分に対して成り立たねばならないから，場の方程式

$$
\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}}-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0 \tag{4.8}
$$

が導かれる。(4.8) に$q^\alpha{}_{,\beta}$をかけ

$$
\frac{\partial L}{\partial x^\beta}=\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\rho}}\frac{\partial q^\alpha{}_{,\rho}}{\partial x^\beta}
$$

であること，また$q^\alpha{}_{,\gamma,\beta}=q^\alpha{}_{,\beta,\gamma}$であることに注意しよう。結果はそのとき再配列されて

$$
\left[\delta_\beta{}^\gamma L-q^\alpha{}_{,\beta}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}}\right]_{,\gamma}=0 \tag{4.9}
$$

となる。

(4.9) および (4.5) から

$$
T_\beta{}^\gamma=\delta_\beta{}^\gamma L-q^\alpha{}_{,\beta}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}} \tag{4.10}
$$

が得られる。古典力学から$q^\alpha{}_{,0}$は速さに相当するから$-T_0{}^0$をエネルギー密度として認知する。(4.9) と (4.10) を調べると定義 (4.10) から$T_\beta{}^\gamma$は一義的には決まらないことを示す。$\Phi_\beta{}^{\gamma\alpha}{}_{,\alpha}$が$\gamma$と$\alpha$について反対称であるとすれば，任意の量$\Phi_\beta{}^{\gamma\alpha}{}_{,\alpha}$を$T_\beta{}^\gamma$に加えることができる。慣習的な方法は関数$\Phi$を，結果と

して得られるテンソル $T_{\beta\gamma}$（指標の両方が上つきまたは下つきのとき）が対称である(1)(2)ように選ぶことであった。その理由は

$$M_{\alpha\beta\gamma}=T_{\alpha\beta}x_{\gamma}-T_{\alpha\gamma}x_{\beta} \tag{4.11}$$

によって定義される角運動量密度が保存則

$$M_{\alpha\beta\gamma},^{\alpha}=0 \tag{4.12}$$

を満足するようにえらぶことが望ましいからである。(4.12) の右辺によって示された微分を遂行すると，(4.12) が対称な $T_{\alpha\beta}$ によって実際に満足されることが示される。

流体に対して $T_{\mu\nu}$ は4元速度 U_{μ} を用いて

$$T_{\mu\nu}=(p+E)U_{\mu}U_{\nu}+\delta_{\mu\nu}p \tag{4.13}$$

によって与えられる。ここで p は圧力，E は全（質量）エネルギー密度で，局所的な物質の静止系の中の各点において評価されるものとする。(4.13) 式は3次元応力† テンソル T_{ij} の4次元的一般化であって，表面要素 ds^{i} を通して伝達される力 dF_{i} は

$$dF_{i}=T_{ij}ds^{j} \tag{4.14}$$

によって与えられる。

(4.4) は質量の保存を与えたが，(4.5) は全エネルギーと運動量の両方の保存を含んでいる。運動量とエネルギーは P_{α} の時間空間成分によって与えられ

$$P_{i}=\int T_{i}{}^{0}dx^{1}dx^{2}dx^{3};\qquad P_{0}=\int T_{0}{}^{0}dx^{1}dx^{2}dx^{3}$$

である。P_{α} はローレンツ変換の下で4元ベクトルのように変換する。

電気力学†† では応力エネルギーテンソルは場のテンソル $F_{\mu\alpha}$ を用いて

$$T_{\mu}{}^{\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha}-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta_{\mu}{}^{\nu}\right) \tag{4.15}$$

によって与えられる。

これは (4.10) からこの章の後の部分で与えられるマックスウェル場に対す

---

† 歴史的にこれは応力エネルギーテンソルにその起源をもっている。弾性においては T_{ij} は体積要素の上の回転のモーメントが釣合うことの帰結として対称である。

†† CGS 絶対単位系を用いている。

るラグランジュアン密度を用いて得られる。

$$-\frac{1}{4\pi}(A_\mu F^{\nu\alpha})_{,\alpha}$$

という項が $T_{\mu\nu}$ を対称にするために加えられた。

これらの表式はローレンツ系に対して成り立つ議論から得られた。けれども(4.13)と(4.15)はテンソル方程式で，したがって任意の座標で成り立つ。(4.10)から得られる任意の結果はテンソル形をもつか，あるいはそれがテンソルとして変換するように（たとえば通常の微係数を共変微係数に変えることによって）容易に修正することができる。$T_{\mu\nu}$ に対する明白に共変的な表式はこの章で後述される。

いま（4.3）に戻り，それの右辺は $T_{\mu\nu}$ のゼロ・ゼロ成分として同定されることに注意する。このことは重力場の方程式が他の場に関連した応力エネルギー・テンソルに等しいと置かれた2階テンソル開係式として定式化されることを暗示する。テンソル場の方程式の左辺は近似のあるレベルでダランベールの演算子に帰着すべきである。このテンソルに対する可能性の数は，それが $g_{\mu\nu}$ から作られ $g_{\mu\nu}$ の2次より高い微係数は含まないという要求によって減少させられる。弱い場に対してダランベール演算子に帰着すべきである。これを保証し，簡単な方法で次元上の無矛盾性を得るために方程式が少なくとも $g_{\mu\nu}$ の2次微係数について1次であることを要求するのは合理的である。

そこで与えられたテンソルが $g_{\mu\nu}$ の2次より高次の微係数を含まずこれらについて線形であると考えよう。クリストッフェル記号が0になるように測地座標系を導入しよう。(3.48) から $g_{\mu\nu}$ の2次微係数はこれらの座標系において曲率テンソルの一次関数としてつねに書くことができることがわかる。もし2階のテンソルが必要とされるなら，もっとも一般的な形式は

$$C_1R_{\mu\nu}+C_2g_{\mu\nu}R+C_3g_{\mu\nu}=B_{\mu\nu} \tag{4.16}$$

でなければならない。

C_1，C_2，C_3 は定数である。(4.16) の最初の2項は曲率テンソル成分の1次結合である。(4.16) はテンソル方程式であるから，それは任意の座標系において成り立つ。一般的共変性の要求，2階テンソルであること $g_{\mu\nu}$ の2次微係

数について線形でしかも高次の微係数が存在しないことから (4.16) の形が得られる。

Mach(3)および Hilbert(4)の議論はこの点において有用である。法則が対称テンソルの間の次の関係式

$$B_{\mu\nu}=T_{\mu\nu} \qquad (4.17)$$

で与えられると考えよう。$g_{\mu\nu}$ を座標の関数として与えるところの一つの解が得られたと仮定しよう。座標変換は四つの関数

$$x'^{\mu}=F^{\mu}(x) \qquad (4.18)$$

を導入することにより遂行されうる。これらの関数のはじめのある時刻においてあるいは空間的な面† の上で $g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ であり $g_{\mu\nu}$ の1次微分係数はいたるところで $g'_{\mu\nu}$ のそれに等しいようにえらばれてよい。(4.17) の共変性のために変形された場の方程式ははじめの方程式と正確に同じ形をもつであろう。そこで方程式は2次より高次の $g_{\mu\nu}$ の微係数を含まないから，いたるところで $g_{\mu\nu}=g'_{\mu\nu}$ ということが帰結される。このことは

$$g'_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}g_{\alpha\beta} \qquad (4.19)$$

と矛盾するであろう。

それゆえに Hilbert は，(4.17) のような4次元の共変的な表式は10個の独立な方程式ではなく，6個の方程式だけが独立となるように4個の恒等式が成り立たねばならないはずであると結論した。この場合に解は，座標系がある非共変的な方法でえらび出されるときに一義的に指定されるところの4個の任意関数を含むだろう。(4.17) によって満足されねばならない4個の恒等式についての手がかりは，ローレンツ計量については (4.8) の右辺を形成する応力エネルギーテンソルは保存則

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=0 \qquad (4.20)$$

を満足するという事実から得られる。一般共変的な理論に対する (4.20) の論

---

† たとえば $x'^0=x^0$, $x'^1=x^1+a(x^0)^3$, $x'^2=x^2$, $x'^3=x^3$ を考えよう。そのとき $x^0=0$ においていたるところで $g'^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$ で，$g^{\mu\nu}$ のすべての一次の空間および時間についての微係数は $x^0=0$ において同じである。

理的拡張は

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{4.21}$$

である。

ビアンキの方程式が

$$\left(R_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}R\right)_{;\nu}=0 \tag{4.22}$$

を与えることが示されている。((3.56)式を見よ。) もし (4.16) の中の定数が適当にえらばれるならこれらの恒等式が応用される。これらの議論から場の方程式は

$$R_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}R-\lambda\delta_{\mu}{}^{\nu}=KT_{\mu}{}^{\nu} \tag{4.23}$$

によって与えられねばならないことが帰結される。

ここで λ と K は定数である。経験により(5)また論理的簡単さから λ は 0 に等しくおいてよいことが示された。Einstein のはじめの(7)定式化は，重力場の中の粒子の運動は，測地方程式

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}+\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{ds}\frac{dx^{\gamma}}{ds}=0 \tag{4.24}$$

を与えるところの，ニュートンの法則の共変的一般化によって記述されるという命題を含んでいる。

後になって運動方程式は実際に場の方程式 (4.23) の中にすでに含まれており，別に要請される必要はないことが示された。(4.24) に従えば静止した物体への単位質量あたりの力は三つの成分 $-c^2\Gamma^{i}{}_{00}$ によって与えられる。弱い場の近似では $g^{i\alpha}$ はローレンツ計量での値に非常に近く，時間に依存しない計量の場合に

$$F^{i}=-c^2\Gamma^{i}{}_{00}\approx\frac{1}{2}c^2\nabla_{i}g_{00}$$

である。他の場との類似によって $\frac{1}{2}c^2g_{\mu\nu}$ を重力ポテンシャルと見なすのが自然である。弱い場に対しては (4.23) はポアソン方程式† (4.2) に帰着すべき

† 弱い場の場合の取扱は第7章で遂行される。

である。これは（4.23）の中の定数 K を $8\pi G/c^4$ に等しいとえらぶことによって成就されうる。ここで G は重力定数であり

$$G=6.67\times10^{-8}\mathrm{cm}^3\mathrm{gm}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$$

である。そのとき場の方程式は

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{4.25}$$

となる。

4.2　場の方程式の変分原理による導出

作用関数 I

$$I=I_G+I_F=\frac{1}{c}\int(L_G+L_F)\sqrt{-g}\,d^4x \tag{4.26}$$

から出発しよう。ここで I_G は作用関数の重力部分，I_F はすべての他の場による部分，L_G は重力場に対するラグランジュアン密度，L_F はすべての他の場に対するラグランジュアン密度である。L_G としては曲率スカラー R に次元的な因数 $c^4/16\pi G$ を掛けたものを選ぶ。停留作用の原理によって

$$(c^3/16\pi G)\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x+\delta I_F=0 \tag{4.27}$$

が得られる。作用関数の重力部分の変分は次式となる。

$$\delta I_G=(c^3/16\pi G)\left[\int\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x+\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})d^4x\right] \tag{4.28}$$

次式を思い出そう。

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}$$

最初に測地座標系を選ぼう。そのとき

$$\delta R_{\mu\nu}=(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})_{;\alpha}-(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})_{;\nu} \tag{4.29}$$

と書いてよい(6)。これはテンソル方程式であってすべての座標系で成り立つ。

$-g$ の変分が必要となる。(3.72) は

$$\delta(-g)=-g\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}=g\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.30}$$

を与える。

式（4.29）と（4.30）および計量テンソルの共変微係数が0になることから（4.28）を

$$\delta I_G=(c^3/16\pi G)\left[\int[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\beta{}_{\mu\beta}]_{;\alpha}\sqrt{-g}\,d^4x\right.$$
$$\left.+\int\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x\right] \tag{4.31}$$

の形に表現することができる。

ここで（4.31）の第1の積分は0となることが証明される(6)。量 $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ はスカラーである；（4.29）からしたがって量 $g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\mu}$ がベクトルであることが帰結される。式（3.75）から次式が得られる。

$$\int[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\beta{}_{\mu\beta}]_{;\alpha}\sqrt{-g}\,d^4x$$
$$=\int(\sqrt{-g}\,[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\mu}])_{,\alpha}d^4x \tag{4.32}$$

ガウスの定理によって（4.32）の右辺を表面積分に変えることができて，それは境界で変分がゼロになることの帰結としてゼロとなる。（4.31）は

$$\delta I_G=\left(\frac{c^3}{16\pi G}\right)\int\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x \tag{4.33}$$

となる。

この結果は（$g^{\mu\nu}$ に加えて）何が変数であるかについての完全に確定的な言明なしに導かれた。作用積分の残りに対しては，$g^{\mu\nu}$ の1次より高次の微係数は存在しないことが仮定されるだろう。I_F の変分に対しては

$$\delta I_F=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial(L_F\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial(L_F\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\right]d^4x \tag{4.34}$$

（4.34）の被積分関数の第2項は

$$\frac{\partial(L_F\sqrt{-g})}{\partial(g^{\mu\nu}{}_{,\alpha})}\delta g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}=\left[\delta g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}(L_F\sqrt{-g})\right]_{,\alpha}$$
$$-\left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}(L_F\sqrt{-g})\right]_{,\alpha}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.35}$$

と書いてよい。

(4.35) の右辺の第1項は，境界での変分がゼロだからふたたびゼロとなるところの表面積分に変形されうる。このことから

$$\delta I_F=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(L_F\sqrt{-g})-\left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}(L_F\sqrt{-g})\right)_{,\alpha}\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{4.36}$$

が得られる。(4.36) の被積分関数のカッコを2階のテンソル密度 $\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g}$ に等しいと置く ($T_{\mu\nu}$ はまもなく応力エネルギー・テンソルと同定されるだろう。)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}(L_F\sqrt{-g})\right)_{,\alpha}-\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(L_F\sqrt{-g})\right]=\left(\frac{1}{2}\right)T_{\mu\nu} \tag{4.37}$$

(4.26)，(4.33)，(4.36) および (4.37) から

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{4.38}$$

が導かれる。

(4.38) の左辺はビアンキ恒等式を満足する。そこで (4.37) によって定義される $T_{\mu\nu}$ は

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{4.39}$$

を満たし，例の一義性の問題は存在するが応力エネルギー・テンソルとして同定されてよい。$T_{\mu\nu}$ を計算するための手続 (4.37) からは，対称な量が常につくられるからある点で (4.10) に比べてある意味で優れている。

4.3　マックスウェル方程式

電気力学に対するラグランジュアン密度は

$$L_M=-\frac{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{16\pi}+\frac{j^\alpha A_\alpha}{c}+L_P \tag{4.40}$$

である。

L_P は荷電粒子に対するラグランジュアン密度，j^α は4元電流密度である。最初にローレンツ計量を考えよう。場のテンソル $F_{\mu\nu}$ は4元ポテンシャル A_μ から

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu} \tag{4.41}$$

として得られる。4元ポテンシャルの成分は（4.40）の中で場の変数であると考えられる。マックスウェル方程式は場のテンソルと4元電磁密度を用いて

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=\frac{4\pi}{c}j^{\mu} \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}=0 \tag{4.43}$$

として記述される。

（4.41）を（4.43）に代入すると，（4.43）は（4.41）に従って得られる任意の $F_{\mu\nu}$ によって満足される恒等式となることが示される。4元ポテンシャルから得られる場のテンソルに対して（4.42）はマックスウェル方程式の完全な内容を表す。

もしローレンツ・ゲージ

$$A^{\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{4.44}$$

を採用するなら，（4.41）を（4.42）に代入して

$$A^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha}=-\frac{4\pi j^{\mu}}{c} \tag{4.45}$$

が得られ，電気力学の4元ポテンシャルを用いる定式化を与える。

これらの結果を任意の座標系に対して一般化したい。（4.40）はやはり成立し，（4.42）は

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=(4\pi/c)j^{\mu} \tag{4.46}$$

となる。

（4.41）は $A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}$ となり，それは（3.35）と $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\sigma}$ の下つきの指標についての対称性によってふたたび（4.41）に帰着する。$F^{\mu\nu}$ は反対称テンソルだから，（3.78）を用いて

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}=(4\pi/c)j^{\mu} \tag{4.47}$$

と書くことができる。

（4.43）の適切な一般化は

$$(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(-g)^{-\frac{1}{2}}F_{\alpha\beta})_{;\delta}=0 \tag{4.48}$$

である。しかしながらカッコの中の量は指標γとδについて反対称な2階テンソルであるから，ふたたび（3.78）を用いて（4.48）は任意の座標系において（4.43）に帰着することが結論される。

式（4.44）は

$$A^{\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{4.49}$$

となる。

測地座標系で最も容易に遂行される一つの計算によって(クリストッフェル記号は0になるがそれらの微係数は0にならないことに注目して)，あるベクトルの共変微分の順序を変更するとき次の結果が得られる。

$$A^{\nu}{}_{;\rho;\sigma}-A^{\nu}{}_{;\sigma;\rho}=R^{\nu}{}_{\alpha\sigma\rho}A^{\alpha}$$

これをいま（4.46）に応用しよう。それはまずA^{μ}によって

$$A^{\nu;\mu}{}_{;\nu}-A^{\mu;\nu}{}_{;\nu}=(4\pi/c)j^{\mu}$$

と書かれる。指標μを下におろし，$A^{\nu}{}_{;\mu;\nu}$を$A^{\nu}{}_{;\nu;\mu}$で記し，（4.49）を用いると

$$A_{\mu;\nu}{}^{;\nu}-R_{\mu\alpha}A^{\alpha}=(-4\pi/c)j_{\mu} \tag{4.50}$$

を（4.45）の一般化として得る。

4.4　荷電粒子の運動

電荷eをもつ荷電粒子に対する作用関数は

$$I=-mc\int ds+(e/c)\int A_{\mu}dx^{\mu} \tag{4.51}$$

で与えられる。

運動方程式はIの変分をゼロに等しく置くことによって得られる。(4.51)の第1項に対して（3.62）から（3.68）までを用いて

$$-mc\delta\int ds=-mc\int\left(\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}\right)g_{\mu\tau}\delta x^{\tau}ds \tag{4.52}$$

が得られる。(4.51）の第2項に対しては

$$\begin{aligned}(e/c)\delta\int A_{\mu}dx^{\mu}&=(e/c)\int\delta A_{\mu}dx^{\mu}+(e/c)\int A_{\mu}d\delta x^{\mu}\\&=(e/c)\int[d(A_{\mu}\delta x^{\mu})-\delta x^{\mu}dA_{\mu}+\delta A_{\mu}dx^{\mu}]\end{aligned} \tag{4.53}$$

一番右辺の被積分関数の第1項は積分されたときに積分路の終点で変分が0であるから0となる。残りの項に対して

$$dA_\mu=\frac{\partial A_\mu}{dx^\rho}dx^\rho$$

しかし

$$\delta A_\mu=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu$$

であることに注目しよう。(4.41) を用いて，(4.52) と (4.53) を結合し，結果を0とおき，$F_{\alpha\beta}$ において一つの指標を上に上げると

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=F^\mu{}_\alpha\frac{dx^\alpha}{ds}(e/mc^2) \tag{4.54}$$

が得られる。

文　　献

1. F. Belinfante, *Physica* 6, 887 (1939).
2. L. Rosenfeld, *Mem. acad. roy. Belgique* 28, 6 (1940).
3. E. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Salzes von der Erhaltung der Arbeit*, Prague, 1877, and Mechanik, Leipzig, 1883.
4. D. Hilbert, Grundlagen der Physik, 1, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* **1915**, 395.
5. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, 1950, 3rd ed., p. 111.
6. A. Palatini, *Rend. circ. mat. Palermo* **43**, 203 (1919).
7. A. Einstein, *Ann. Physik* **49**, 769 (1916).

第5章
一般相対論の実験的テスト

5.1 シュヴァルツシルトの解

現在までのところ一般相対論の実験的テストはエートヴェッシュの実験，重力による赤方偏移，惑星軌道の近日点の進みおよび太陽による光の彎曲から成り立つ。これらの効果の最後の三つは等方的に対称な場に対する場の方程式の解に基づいている。K. Schwarzschild(1) に従ってこの解を導こう。

出発点は平担な時空の等方対称な2乗線要素

$$-ds^2=-c^2dt^2+dr'^2+r'^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5.1}$$

である。

いま原点に等方対称性をもつ質量を導入しよう。(5.1) は等方対称性と時間反転に関する対称性を保持するような方法で修正されねばならない。このことから

$$\begin{aligned}-ds^2=-f_0(r',\ t)c^2dt^2+f_1(r',\ t)dr'^2\\ +f_2(r',\ t)r'^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\end{aligned} \tag{5.2}$$

が導かれる。新しい座標 r を $f_2(r',\ t)r'^2=r^2$ となるように選ぶ。$f_0=e^\nu$，$f_1=e^\lambda$ とおき，$g_{00}=-e^\nu$，$g_{11}=e^\lambda$，$g_{22}=r^2$，$g_{33}=r^2\sin^2\theta$ が得られる；そうすれば

$$-ds^2=-e^\nu c^2dt^2+e^\lambda dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5.3}$$

物体を囲む空虚な空間に対して $T_{\mu\nu}=0$ で，場の方程式は

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=0$$

となる。この式に $g^{\mu\nu}$ を掛け縮約すると $R=0$ が得られる。真空に対する重力場の方程式は

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{5.4}$$

となる。

計算を容易にするために $\Gamma^{\delta}{}_{\mu\nu}$ の0でない成分を与えよう。

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^1{}_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r} &&\Gamma^2{}_{33}=-\sin\theta\cos\theta\\
&\Gamma^1{}_{10}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{c\partial t} &&\Gamma^1{}_{00}=\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r}e^{\nu-\lambda}\\
&\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^3{}_{13}=\frac{1}{r} &&\Gamma^0{}_{00}=\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{c\partial t}\\
&\Gamma^0{}_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{c\partial t}e^{\lambda-\nu} &&\Gamma^3{}_{23}=\cot\theta\\
&\Gamma^0{}_{10}=\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r} &&\Gamma^1{}_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda}\\
&\Gamma^1{}_{22}=-re^{-\lambda}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

真空の場合には (5.4) あるいは $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ を0に等しいと置いたものを用いる。$G_{\mu\nu}$ に対する表式の方が幾分か簡単で，重力場のみをもつ真空以外の問題が考えられる時にも用いられうる。$G_\mu{}^\nu$ の0でない成分はまともな計算によって次のようになる。

$$
\begin{aligned}
G_0{}^0&=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\\
G_0{}^1&=\frac{e^{-\lambda}}{rc}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
G_2{}^2=G_3{}^3&=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\frac{\partial^2\lambda}{c^2\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)\left(\frac{\partial\nu}{c\partial t}\right)\right)\\
G_1{}^1&=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

(5.6) を0に等しいとおくと独立な方程式

$$\frac{\partial\nu}{\partial r}+\frac{1}{r}-\frac{e^{\lambda}}{r}=0 \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\frac{1}{r}+\frac{e^{\lambda}}{r}=0 \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}=0 \tag{5.9}$$

に導かれる。方程式（5.7）と（5.8）の和は

$$\frac{\partial}{\partial r}(\lambda+\nu)=0 \tag{5.10}$$

を与える。

（5.9）は λ が時間に依存しないことを要求する。したがって(5.10)は，ν の中の時間依存性が r とは独立な関数から生じなければならないことを意味する。(5.3）はそういう時間依存性は，時間だけを含む座標変換によっていたるところで除くことができることを示している。これは等方対称性の仮定が空間の幾何学において時間に依存しない記述の可能性を保証するという命題に同等である。(5.5)と(5.6)の中のすべての時間微係数を0に置くことができる。(5.7）と（5.8)の解は

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{K_0}{r} \tag{5.11}$$

である。

定数 K_0 は質量から遠い距離でニュートンの重力の法則に近づくという条件から決定することができる。

測地方程式から，中心の質量 M に相対的に静止している小さなテスト用物体の加速は

$$-c^2\Gamma^r{}_{00}=c^2\left(\frac{K_0}{2r^2}\right)\left(1+\frac{K_0}{r}\right)\rightarrow\frac{c^2K_0}{2r^2}$$

であることが結論される。これとニュートンの値 $-GM/r^2$ を比較して

$$K_0=-\frac{2GM}{c^2} \tag{5.12}$$

が与えられる。シュヴァルツシルトの計量（5.3）は次の形をとる。

$$-ds^2=-\left(c^2-\frac{2GM}{r}\right)dt^2+r^2(\sin^2\theta d\varphi^2+d\theta^2)+\frac{dr^2}{1-\left(\frac{2GM}{c^2r}\right)} \tag{5.13}$$

(5.13) は $r=2GM/c^2$ で“シュヴァルツシルトの特異点”を示す†。このことは質量のある物体の大きさを $r>2GM/c^2$ に制限しているように見える。電子に対してこの値は 13.2×10^{-56}cm で，現在の素粒子論に関係づけるにはあまりにも小さい値である。原点での荷電粒子に対して，(5.3) に導いた議論はやはり成り立つ。けれども粒子の電場と関連したエネルギーは空間のいたるところに分布される。マックスウェルの応力テンソル (4.15) の跡 $T_\alpha{}^\alpha$ は0となる。一つの指標を上に上げ，場の方程式 (4.25) を縮約するなら，結果は結合されたアインシュタイン-マックスウェル場に対して $R=0$ であり

$$R_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{5.14}$$

が完全に電磁場から成り立つエネルギー源の場合に得られる。計量 (5.3)，式 (5.6) と (4.15)，等方対称†† な A_0 に対するマックスウェル方程式 (4.47) を用いて (5.13) の代わりに電荷 e をもつ粒子の場合に

$$\begin{aligned}-ds^2=&-\left(c^2-\frac{2GM}{r}+\frac{Ge^2}{c^2r^2}\right)dt^2\\&+r^2(\sin^2\theta d\varphi^2+d\theta^2)+\frac{dr^2}{\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}+\dfrac{e^2G}{c^4r^2}\right)}\end{aligned} \tag{5.13a}$$

が得られる。

有限なひろがりをもつ電荷をもたない等方な物体に対して (5.13) は物体の外でのみ成り立つ，流体球に対する内部解は次の形に書ける。

$$-ds^2=-\left[A-B\sqrt{\left[1-\frac{r^2}{R_s{}^2}\right]}\right]^2c^2dt^2$$

---

† H. P. Robertson はテスト用物体はシュヴァルツシルト特異点を横切るのに有限な時間がかかることを示した。新しい座標はシュヴァルツシルト特異点を除去するが，特異性をもつリーマンテンソル不変量の原点のそれは除くことができない。

Finklestein(8)は原点のほかに特異点をもたないシュヴァルツシルトの解の解析的な拡張を与えた。それは時間についての対称性をもたない。彼はこれを一般相対論の非線形性に帰した。

†† 定数を評価するには不変量 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を大きい距離での荷電粒子に対する平担な空間における量と比較すればよい。

$$+\frac{dr^2}{1-\dfrac{r^2}{R_s^2}}+r^2[\sin^2\theta d\varphi^2+d\theta^2] \tag{5.13b}$$

これが境界 $r=r_1$ で（5.13）と正しくつながることを要求し，密度 ρ を用いて

$$R_s^2=(3c^2/8\pi\rho G);\qquad A=(3/2)\sqrt{\left[1-\frac{r_1^2}{R_s^2}\right]};\qquad B=\frac{1}{2}$$

を得る。

5.2　重力による赤方偏移

重力による赤方偏移の公式を導くために計量（5.13）に戻る。星の表面に不変な Δs によって与えられる振動間隔をもつ振動子があると考えよう。光のパルスは各振動のピークで放出され，空間の各点の時間座標をこれらのパルスを受けることにより確定させるものと考えよう。第一に，固定された点において引き続いたパルスの間の時間座標間隔 Δt は空間のいたるところで星の表面での値に等しいことに注目する。各パルスは動径方向に零測地線に沿って伝播し，（5.13）は $ds=0$ に対して

$$dt=-\frac{g_{11}(r)dr}{cg_{00}(r)} \tag{5.15}$$

を与える。（5.15）を動径距離 r において n 番目のパルスの到達時刻まで積分すると

$$t(r,n)-t(r_0,n)=-\int_{r_0}^{r}\frac{g_{11}(r')dr'}{cg_{00}(r')}=F(r,r_0) \tag{5.16}$$

同様に

$$t(r,n+1)-t(r_0,n+1)=F(r,r_0) \tag{5.17}$$

（5.16）を（5.17）から引くと

$$t(r,n+1)-t(r,n)=t(r_0,n+1)-t(r_0,n)=\Delta t \tag{5.18}$$

となり，これは r に独立である。座標振動数を ν_c としよう。

$$\nu_c=\frac{1}{\Delta t}=\frac{c\sqrt{-g_{00}}\ \text{（遠くの振動子）}}{\Delta s} \tag{5.19}$$

半径 r にある観測者の位置に置かれたまったく同一の振動子の場合に，局所的

に生成された振動数 ν_l は不変な間隔 Δs を用いて

$$\nu_l=\frac{1}{\Delta s}\sqrt{-g_{00}}\ (\text{局所的振動子}) \tag{5.20}$$

によって与えられることが仮定される。(5.19) と (5.20) を結合すると

$$\nu_c-\nu_l=\nu_l\left(\sqrt{\frac{g_{00}\ (\text{遠くの振動子})}{g_{00}\ (\text{局所的振動子})}}-1\right) \tag{5.21}$$

動径座標 r_0 にその表面をもつ物体に対する動径座標 r での振動数のずれは

$$\Delta\nu=\nu_c-\nu_l\approx-\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)\nu_l \tag{5.21a}$$

(赤の方に向かって) となり (1.15) と一致する。なぜなら r と r_0 は対応する距離にほとんど等しいから。(5.21) と等価原理の結果 (1.15) の間の差は振動数のずれの比として約 $(GM/c^2r_0)^2$ となり，全赤方偏移に対する地上測定の場合の 10^{-18} にほぼ等しい。

シリウスの伴星の測定から 19km/sec の速さにともなうドップラー効果に同等な赤方偏移が知られる。一方計算された同等の値は 20km/sec である。連星 40Eridani の場合と白色矮星の測定は 21±4km/sec を与え，これは計算値17±3km/sec と比較されるべきである。太陽についての線偏移の測定は表面の各点で異なった値が得られている。このことは理解されていない。

実験的研究は，地球の場を含む他の方法で赤方偏移を測ろうと進行中である。一つの型の実験は地上の“原子時計”の型(4)の正確な振動数の標準とロケットで発射された人工衛星(3)を用いて異なった重力ポテンシャルの下にあるものを比較する。別の方法は (エネルギー領域～10^4eV の) 長寿命の (10^{-8}sec より長い) 原子核の“アイソマー”状態から放出されたガンマ輻射のあるものは反跳がないというメスバウアー効果(5)の発見を利用する。反跳運動量† は固体全体

† 反跳運動量は格子振動を励起するか，あるいは結晶全体に運動量を与えることになるだろう。前者の場合には放出原子が反跳を行うからドップラー幅が存在するであろう。格子振動が励起されないための判定条件は次のように述べることができる。ガンマ線の反跳運動量を $p=\hbar\omega_r/c$ であるとしよう。原子の質量を m とする。θ_D をデバイ温度，k をボルツマン定数としたとき，もし $(p^2/m)\ll k\theta_D$ なら顕著なドップラー効果はないことが期待される。この結果は輻射された運動量転移の効果を考慮することによって理解されうる。ガンマ線放出の前に格子振動の波動関数↗

として受けとめられ，顕著なドップラー・シフトやひろがりは存在しない。寿命が長いのは核の基底状態の角運動量が励起状態のそれとは異なるという事実の帰結である。輻射は磁気双極子型かあるいはもっと高い多重極の次数をもつ。振動数と線の幅との比は異常に大きい。この輻射が地上での赤方偏移の測定に用いられうるという提案は Pound と Rebka (6) により最初に出版され，独立に Wilkinson, Boyle, Devons および Cranshaw (7) により前進させられた。

270 日の Co^{57} の放射崩壊から得られる 10^{-7} 秒の Fe^{57} の 14,700eV の輻射の性質が報告された。Pound と Rebka はシンチレーション・スペクトロメーターによって輻射を観測し，スペクトロメーターに向かってあるいはそれから離れるように放射源を可動コイル変換器に接着することにより動くように配列した。この方法で彼等は輻射が半値幅 $\Delta\nu\sim 2\times 10^6$サイクル/sec をもつことを観測した。赤方偏移は振動数に比例するから，約 10^{-14} のシフトが地球の重力場の中での約 50m の高さの変化に対して期待されるだろう。Fe^{57} の輻射に対

↘を ψ_j としよう。ψ_j はハミルトン演算子の固有関数である。もしガンマ線放出の際ある方法で運動量 p が結晶に転移されるなら，輻射直後の波動関数の $e^{ip_sq^s/\hbar}\psi_j$ である。こで q^s は調和振動子の座標で，この波動関数は初めの状態より p 単位だけ大きい運動量の期待値をもつところのものである。輻射後は

$$a_r\psi_r = e^{ip_sq^s/\hbar}\psi_j$$

$$a_r = \langle E_r|e^{ip_sq^s/\hbar}|E_j\rangle \approx \delta_{rj} + ip_s|q^s|_{rj}/\hbar$$

と書いてよい。$p_s|q^s|_r$，の項は光子の放出または吸収をひき起すが，δ_{rj} の項はそうでない。フォノンの励起をともなわない放出の相対的な確率を求めるためには

$$\hbar^{-2}\sum_{\text{モード}} p^2(|q|_{rj})^2$$

を評価する必要がある。$|q|_{rj}$ は調和振動子の行列要素である。

$$(|q|_{rj})^2 = \frac{\hbar}{Nm\omega_l}(N_{\mathrm{ph}}+1) \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\hbar}{Nm\omega_l}N_{\mathrm{ph}}$$

N_{ph} はフォノンの数，N は原子の数，mN は結晶の質量，ω_l は格子振動の振動数である。

$$\sum_{\text{モード}}(|q|_{rj})^2 \approx \frac{\hbar}{m\omega_l}(N_{\mathrm{ph}}+1) \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\hbar}{m\omega_l}N_{\mathrm{ph}}$$

エネルギーは少なくことも近似的には保存しているから，ω はデバイ振動数 $\omega_D = k\theta_D/\hbar$ のオーダーをもつ，高い格子振動の振動数となるだろう。また $N_{\mathrm{ph}}\sim 1$ これらの関係式を用いて，$(p^2/\hbar^2)\sum_{\text{モード}}(|q|_{rj})^2 \ll 1$

を要求すると $(p^2/m) \ll k\theta_D$ が得られる。

してこれは約 3×10^4 サイクル/sec，あるいはすでに実現された線の幅の約 1％となる。そこでこれは実現可能な実験† である。Pound と Rebka で，制限された強さの放射源については源と吸収体の間の距離が増加するにつれて，カウント数が減少するために，統計的ふらつきによって精度が減少することを注意している。このことは源と観測者の間の高さの差が変化するとき，増加した赤方偏移をちょうど打ち消してしまう。より大きな垂直距離は，輻射を集中させるためのほかの方法が用意されない限り，精度を非常に大きくは増加させない。

5.3 惑星軌道への効果

(5.5) は測地方程式†† を質量をもった粒子あるいは光線に対して書くために用いられてよい。θ 座標に対する微分方程式は

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0 \tag{5.22}$$

である。0 でない静止質量をもつ粒子に対して，s は測地線に沿った区間である。もし始速度と中心の質量を含む平面が始めに $\theta=\pi/2$，$d\theta/ds=0$ ととられるなら問題は簡単化され，(5.22) から $d^2\theta/ds^2=0$ となる。そのとき全軌道は赤道面の中に横たわるだろう。残りの測地方程式は

---

† そういう実験の結果は最近 Cranshaw, Schiffer, Whitehead (*Phys. Rev. Letters* **4**, 163 (1960)) によって報告された。彼らは Fe^{57} と 12.5m の全高度差を用いた。赤方偏移は予測値の 0.96 ± 0.45 倍であることが観測された。もっと正確な結果は Pound と Rebka (*Phys. Rev. Letters* **4**, 337 (1960) によって成就された。彼等は予測値の 1.05 ± 0.10 倍の赤方偏移を得た。特別な源や吸収体に関連した異常な振動数のシフトや温度に依存する振動数のシフトが考慮されねばならなかった。後者の効果は温度に依存する速さと関連した時間の伸びである。角振動数のシフトは

$$\varDelta\omega=\omega_r\left(1-\frac{<v^2>}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\omega_r\approx-\frac{3\omega_r kT}{2mc^2}$$

である。ここで T は絶対温度で一番右辺の式の近似は高温度（そのとき等分配が成立する）において成り立つ。

この効果は源と吸収体の温度を制御することにより最小にされた。その他の異常は源と吸収体の位置を交換することによって補正された。

†† これらの計算に対して座標系は星に固定された軸をもつとの仮定がなされる。

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{d\nu}{dr}\left(c\frac{dt}{ds}\right)^2=0 \quad (5.23)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0 \quad (5.24)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{d\nu}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0 \quad (5.25)$$

方程式（5.24）と（5.25）は容易に積分され

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=K_1 \quad (5.26)$$

$$\frac{dt}{ds}=K_2e^{-\nu} \quad (5.27)$$

を与える。

K_1とK_2は軌道の定数である。（5.23）を直接に積分する代わりに $\theta=\pi/2$ に対するシュヴァルツシルトの計量（5.13）を

$$e^{-\nu}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2-e^{\nu}\left(c\frac{dt}{ds}\right)^2=-1 \quad (5.28)$$

の形に書くことによりそれの第1の積分を得る。（5.28）は空間の中の量 dr/ds, $d\varphi/ds$ および dt/ds の任意の集合の間の関係である。けれども $d\varphi/ds$ と dt/ds を（5.26）および（5.27）によって与えられる値に限定するなら，ds と dt とを消去し，変数 r と φ を用いて軌道に対する常微分方程式

$$(K_1)^2\frac{e^{-\nu}}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{K_1{}^2}{r^2}-e^{-\nu}c^2(K_2)^2=-1 \quad (5.29)$$

を得ることができる。$W=1/r$ を代入し，（5.29）を φ に関して微分すると，（5.11）の助けによって

$$\frac{d^2W}{d\varphi^2}+W=\frac{GM}{(K_1)^2c^2}+\frac{3GM}{c^2}W^2 \quad (5.30)$$

を得る。（5.30）はある近似的手続きにより逐次的に解くことができる。$\rho=2GM/c^2$ をシュヴァルツシルトの半径とし

$$\rho W=\rho W^{(1)}+\rho W^{(2)}+\cdots \quad (5.31)$$

とおこう。$\rho W^{(1)}$ は1次，$\rho W^{(2)}$ は2次の量である。（5.31）を（5.30）に代入し，相当する次数の項を別々に0とおくと方程式

$$\frac{d^2W^{(1)}}{d\varphi^2}+W^{(1)}=\frac{GM}{(K_1)^2c^2} \tag{5.32}$$

$$\frac{d^2W^{(2)}}{d\varphi^2}+W^{(2)}=\frac{3GM}{c^2}(W^{(1)})^2 \tag{5.33}$$

を得る。(5.32) の解は

$$W^{(1)}=\frac{GM}{(K_1)^2c^2}(1+\varepsilon\sin(\varphi-\varphi_0)) \tag{5.34}$$

である。ここで ε は (5.34) で記述される楕円軌道の離心率である。座標系を $\varphi_0=0$ となるように定める。$2a$ を楕円の長軸（4.1 図）の長さとしよう。

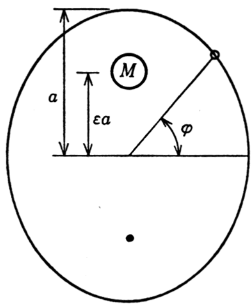


図　5.1

$$2a=\left(\frac{1}{W^{(1)}}\right)_{\varphi=\pi/2}+\left(\frac{1}{W^{(2)}}\right)_{\varphi=3\pi/2} \tag{5.35}$$

定数 $(K_1)^2$ に対して，(5.35) を用いて離心率と主軸の長さの半分を使って

$$(K_1)^2=\frac{aGM}{c^2}(1-\varepsilon^2) \tag{5.36}$$

と書くことができる。(5.36) と (5.34) を用いると (5.33) の解を書くことができる。(5.30) の（2 次までの）全体の解は

$$W=\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}\left[1+\varepsilon\sin\varphi-\frac{3GM\varepsilon}{c^2a(1-\varepsilon^2)}\varphi\cos\varphi+\frac{GM\varepsilon^2}{c^2a(1-\varepsilon^2)}\cos^2\varphi+\frac{GM}{c^2a(1-\varepsilon^2)}(3+\varepsilon^2)\right] \tag{5.37}$$

であることが見いだされる。

(5.37) の中で

$$-\frac{3GM\varepsilon\varphi\cos\varphi}{c^2a^2(1-\varepsilon^2)^2}$$

の項は近日点の進みをひき起こすだろう。第2と第3項は次の形に表現される。

$$\frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}\left[\sin\varphi-\frac{3GM\varphi\cos\varphi}{c^2a(1-\varepsilon^2)}\right] \tag{5.38}$$

$$=\frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}\left[1+\frac{9G^2M^2\varphi^2}{c^4a^2(1-\varepsilon^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\left(\varphi+\tan^{-1}-\frac{3GM\varphi}{c^2a(1-\varepsilon^2)}\right)$$

(5.38) は各回転毎に近日点は量 Δ だけ進むであろう。

$$\Delta=\frac{6\pi GM}{c^2a(1-\varepsilon^2)} \tag{5.39}$$

近日点の進みの離心率 ε および主軸の長さの半分 a への依存性は明白である。(5.39)の中の量 c は重力相互作用の伝播の速さである。それゆえに(5.39)と水星に対する観測値（天体観測によれば一世紀あたり 42.6±0.9 sec を与え，式(5.39) は一世紀あたり 43.0 sec を予測する）が一致したことは一般相対論が重力のよい記述を与え，重力相互作用は光速で伝播することを示している。

惑星軌道が正確には周期的にならないことは，ゆっくりと運動する物体($v\ll c$)の逆2乗法測からのズレに対する特に敏感なテストを提供する。静止した物体への力はニュートンの値でなく，むしろ

$$c^2\Gamma^r{}_{00}=\frac{GM}{r^2}\left[1-\frac{GM}{c^2r}\right] \tag{5.40}$$

で与えられる。ここに r は中心にある物体の表面からの距離 l によって

$$l=\int_{r_0}^{r}g_{11}^{\frac{1}{2}}dr$$

で表される。

5.4 光の彎曲

重力場の中での光の彎曲を議論するためには，(5.22)，(5.23)，(5.24) および (5.25) で与えられる測地方程式をもう一度解かねばならない。積分 (5.26) および (5.27) はやはり成立する。(5.28) の代わりに零間隔に対する相当す

る関係式を得る。まずシュヴァルツシルトの線要素の2乗をゼロに等しいと置き，ds^2 で割って

$$e^{-\nu}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2-e^{\nu}c^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0 \tag{5.41}$$

となる。このとき s は区間以外のパラメターである。(5.26)と(5.27)を(5.41)の中に使って，$W=1/r$ とおくと方程式

$$\left(\frac{dW}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{cK_2}{K_1}\right)^2-W^2\left(1-\frac{2GM}{c^2}W\right) \tag{5.42}$$

に導く。

(5.42) を微分して得られる方程式

$$\frac{d^2W}{d\varphi^2}+W=\frac{3W^2GM}{c^2} \tag{5.43}$$

を取り扱う方がやさしい。

(5.43) は (5.30) に対して用いられた方法によって2次まで解くことができ

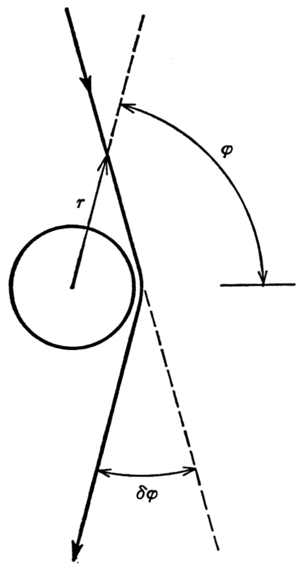


図 5.2

る；結果は

$$W=\frac{1}{r}=\frac{\cos\varphi}{r_0}+\frac{GM}{c^2{r_0}^2}(1+\sin^2\varphi) \tag{5.44}$$

(5.44) の中で積分定数 r_0 は摂動を受けない光の進路（4.2図を見よ）に対して最近接距離である。

$r\to\infty$ に対して

$$\cos\varphi=-\frac{GM}{c^2r_0}(1+\sin^2\varphi) \tag{5.45}$$

の解であるところの φ の二つの値を得る。それらの値を

$$\varphi_1=\frac{\pi}{2}+\frac{\delta\varphi}{2}$$
$$\varphi_2=-\frac{\pi}{2}-\frac{\delta\varphi}{2} \tag{5.46}$$

としよう。(5.45) を解くと全彎曲角として

$$\delta\varphi=4GM/c^2r_0 \tag{5.47}$$

が得られる。

太陽の端をちょうどかすめる星からの光に対して (5.47) は $\varphi=1.75$ 秒を与える。

赤方偏移と光の彎曲についての天文学なデータのまとめは Trumpler (2) によってなされた。日食の間に観測されるような彎曲に対して，個々の測定値は約10％の誤差をもち，(5.47) によって与えられる値の通常10％以内にある。11回の日食に対する平均は約500分の1の精度で (5.47) と一致する。

5.5 結　　語

これまで議論された4種の実験がいままでのところ一般相対論の実験的検証のすべてである。これは量子論を支持する実験データーの豊富さと著しい対照を成している。実行可能な他の実験を考え出すことは大きい挑戦であった。問題はある程度技術的なものである。技術は理論の中にある非常に弱い相互作用が予言する極めて小さな効果を観測するために利用できないのが普通である。後の章では最近提案された付加的な実験が議論されるだろう，

文　　　献

1. K. Schwarzschild, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss.* **1916**, 424.

2. R. J. Trumpler, *Jubilee of Relativity Theory (Helv. Acta Phys.,* Supplement IV), Mercier and Kervaire, p. 408.

3. S. F. Singer, *Phys. Rev.* **104**, 11 (1956). 巻末の練習問題18も見よ。

4. H. Lyons, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **55**, 831 (19aa).

5. R. J. Mössbauer, *Z. Physik* **151**, 124 (1958) ; *Naturwissenschaften* **45**, 538 (1958) ; *Z. Naturforsch*, **14a**, 211 (1959).

6. R. V. Pound and G. A. Rebka, Jr., *Phys. Rev. Letters* **3**, 439 (1959).

7. J. P. Schiffer and W. Marsball, *Phys. Rev. Letters* **3**, 556 (1959).

8. D. Finklestein, *Phys. Rev.* **110**, 965 (1958).

第6章
保　　存　　則

6.1　正準的な応力エネルギー擬テンソル

特殊相対論では，応力エネルギーテンソルによって満足される関係式 $T_\mu{}^\nu{}_{,\nu}=0$ が3個の空間座標について積分されるとエネルギーと運動量の保存則を得る。$T_0{}^\nu{}_{,\nu}$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T_0{}^0 dx^1 dx^2 dx^3 = -\int\left(\frac{\partial T_0{}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial T_0{}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial T_0{}^3}{\partial x^3}\right)dx^1 dx^2 dx^3 = -\int T_0{}^i dS_i \tag{6.1}$$

一番右辺において体積積分は境界のベクトル面積要素 dS_i をもつ表面積分に変換された。この結果は与えられた体積の中でのエネルギーの変化をその中へのエネルギー運動量の流れに関係づける。

もしローレンツ計量が使われないとすれば事情は異なる。応力エネルギーテンソルは $T_\mu{}^\nu{}_{;\nu}=0$ を満足する。$T_{\mu\nu}$ は対称だから (3.79) を用いて

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu}=(-g)^{-\frac{1}{2}}(T_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta} \tag{6.2}$$

と書くことができる。そのときもし計量が $\mu=0$ に対して時間に依存するなら (6.2) の第2項は各体積要素の中の重力場と他の場との間の時間に依存するエネルギーおよび運動量の交換を表現している。(6.1) の積分に導いた演算を常に遂行できるために

$$(-g)^{-\frac{1}{2}}(t_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}=-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta} \tag{6.3}$$

となるような量 $t_\mu{}^\nu$ を求めよう。したがって (6.2) は

$$[(T_\mu{}^\nu+t_\mu{}^\nu)\sqrt{-g}]_{,\nu}=0 \tag{6.4}$$

となる。(6.4) について，(6.1) と同様な積分が一般に遂行されて重力場を含む保存則(1)—(5)を生ずることが期待されよう。式 (6.3) は一義的には $t_\mu{}^\nu$ を定義していない。また (6.3) の右辺から $t_\mu{}^\nu$ はテンソルでないことが帰結される。$t_\mu{}^\nu$ はある制限された変換群の下でテンソルのように振舞うことがわかるだろう。それは応力エネルギー擬テンソルと呼ばれる。$t_\mu{}^\nu$ に対する表式を得る一つの方法は本質的に(4.10)を導いた手続きに従うことである。重力作用関数

$$I_G=(c^3/16\pi G)\int R\sqrt{-g}\,d^4x \tag{6.5}$$

が場の変数 $g^{\mu\nu}$ の2次の空間および時間微係数を含むから，問題は場の理論において通常遭遇するものとは異なっている。しかしながら2次の微係数を含む部分は表面積分として書かれうる。実際

$$\begin{aligned}R\sqrt{-g}=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}=[&g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha}-g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu}\\&+g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}-g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}]\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{6.6}$$

をもつ。2次微係数を含む項は (6.6) の右辺の最初の二つである。これらは次のように配列し直すこともできる。

$$\begin{aligned}(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha}-g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu})\sqrt{-g}&=(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\alpha}\\-(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}\sqrt{-g})_{,\nu}&-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\alpha}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}\end{aligned} \tag{6.7}$$

もし (3.73) をここで用いるなら

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}=gg^{\iota\kappa}g_{\iota\kappa,\alpha};\quad g^{\mu\nu}{}_{;\alpha}=0;\quad g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}=-\Gamma^\mu{}_{\tau\alpha}g^{\tau\nu}-\Gamma^\nu{}_{\tau\alpha}g^{\mu\tau};$$

$$\Gamma^\beta{}_{\mu\beta}=\frac{1}{2}g^{\iota\kappa}g_{\iota\kappa,\mu}$$

(6.7) の最後の2項は

$$\begin{aligned}&-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\alpha}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}\\&=2g^{\mu\nu}[\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}]\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{6.8}$$

と書くことができる。

(6.6)，(6.7) および (6.8) を用いて，(6.5) を

$$\int R\sqrt{-g}\,d^4x=\int g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta})\sqrt{-g}\,d^4x$$

$$+\int[\sqrt{-g}\,(g^{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta}-g^{\alpha\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})]_{,\delta}d^4x \tag{6.9}$$

の形に表してよい。

それゆえに (6.9) の中で右辺の第1の積分はただ $g^{\mu\nu}$ とその1次微係数の関数であることがわかる；第2の積分はガウスの定理を使って容易に表面積分に変えることができる。境界の上で0となる作用関数の変分に対して (6.9) の右辺の最初の積分だけが必要とされるだろう。

$$\mathscr{L}_G=\left(\frac{c^4}{16\pi G}\right)g^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}) \tag{6.10}$$

および全ラグランジュアン密度 $\mathscr{L}$ を

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_G+L_F \tag{6.11}$$

によって定義できる。L_F は重力場を除く場のラグランジュアン密度を表す。(6.10) は2次微係数をもたない重力ラグランジュアンの部分だけを含み，L_F も場の変数とその1次微係数だけを含むから，場の理論（4.1節）の標準的なラグランジュアンの定式化を作用積分

$$I=\frac{1}{c}\int\mathscr{L}\sqrt{-g}\,d^4x \tag{6.12}$$

に適用してよい。そこで場の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}-\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}=0 \tag{6.13}$$

であることが帰結される。(6.11) および (4.37) を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{16\pi G}{c^4}\left[\frac{\partial(\mathscr{L}_G\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial(\mathscr{L}_G\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}}\right]\\&=\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{-g}=\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{6.14}$$

と書くことができる。そうして (4.10) を用いて全正準的応力エネルギー擬テンソル $\tau_{\mu}{}^{\nu}$ を

$$\tau_{\mu}{}^{\nu}\sqrt{-g}=\left[\delta_{\mu}{}^{\nu}\mathscr{L}\sqrt{-g}-g^{\rho\beta}{}_{,\mu}\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\beta}{}_{,\nu}}\right] \tag{6.15}$$

によって定義できる。その重力部分は

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{-g}=\left[\delta_\mu{}^\nu\mathscr{L}_G\sqrt{-g}-g^{\rho\beta}{}_{,\mu}\frac{\partial(\mathscr{L}_G\sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\beta}{}_{,\nu}}\right] \tag{6.16}$$

ただし

$$(\tau_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}=(t_\mu{}^\nu\sqrt{-g}+T_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}=0 \tag{6.17}$$

表式 (6.13) と (6.14) は，それらがラグランジュの方程式の形でのアインシュタインの場の方程式を示しているから，特別に興味がある。

ある座標変換の下での $\mathscr{L}$ の不変性を利用して異なった方法で (6.15) を導くことは一層教訓的である。理論の保存則はある不変性と関係していることを思い出そう。たとえば力学においてエネルギー保存はハミルトニアンの時間の平行移動の下での不変性に関係づけられ，角運動量の保存はハミルトニアンの回転の下での不変性に関係づけられる。

無限小座標変換†

$$x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu \tag{6.18}$$

を遂行しよう。$g^{\kappa\nu}$ に対する変換則を利用すると (6.18) に相当する変化に対し

$$\delta g^{\kappa\mu}=g^{\kappa\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\delta x^\mu)+g^{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\delta x^\kappa)=g'^{\kappa\mu}(x')-g^{\kappa\mu}(x) \tag{6.19}$$

$$\delta g^{\kappa\mu}{}_{,\beta}=\frac{\partial g'^{\kappa\mu}(x')}{\partial x'^\beta}-\frac{\partial g^{\kappa\mu}(x)}{\partial x^\beta}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\delta g^{\kappa\mu})-g^{\kappa\mu}{}_{,\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\delta x^\gamma) \tag{6.20}$$

$$\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\mu}}\delta g^{\kappa\mu}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}}\delta g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha} \tag{6.21}$$

を与える。L_F がスカラーであるから，したがって $\delta L_F=0$ であって，このことが続く。(6.19) と (6.20) を利用して

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}=&\left[2\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\mu}}g^{\kappa\nu}+2\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}}g^{\kappa\nu}{}_{,\alpha}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\beta}{}_{,\nu}}g^{\kappa\beta}{}_{,\mu}\right](\delta x^\mu)_{,\nu}\\&+2\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}}g^{\kappa\nu}(\delta x^\mu)_{,\nu,\alpha}\end{aligned} \tag{6.22}$$

---

† この章で δ 記号は (6.18) と (6.19) によって表されるものを常に意味する。ある著者は $\bar{\delta}$ という記号を次の異なった演算に対して用いる。

$$\bar{\delta}g^{\kappa\mu}=g'^{\kappa\mu}(x)-g^{\kappa\mu}(x)=\delta x^{\kappa;\mu}+\delta x^{\mu;\kappa}$$

が得られる。

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\kappa\mu}}=\frac{\partial}{\partial g^{\kappa\mu}}[(\mathscr{L}\sqrt{-g})(-g)^{-\frac{1}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}}+\frac{1}{2}g_{\kappa\mu}\mathscr{L} \tag{6.23}$$

と書いてよい。ここでふたたび $dg=-gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$ を用いた。$\sqrt{-g}$ は ${g^{\kappa\mu}}_{\beta}$ を含まないことに注意しよう。(6.23) を (6.22) の中に用いると

$$(\delta\mathscr{L})\sqrt{-g}=\left[2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}}g^{\kappa\mu}+\mathscr{L}\sqrt{-g}\delta_{\mu}{}^{\nu}+2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\beta}}g^{\kappa\nu}{}_{,\beta}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\beta}{}_{,\nu}}g^{\kappa\beta}{}_{,\mu}\right](\delta x^{\mu})_{,\nu}+2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}}g^{\kappa\nu}(\delta x^{\mu})_{,\nu,\alpha} \tag{6.24}$$

が得られる。$\mathscr{L}$ は線形座標変換の下で不変である；これらに対して (6.24) の右辺の最後の項は0であり，そうして $\delta\mathscr{L}$ は0とならねばならない。残りの項が0となり

$$2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}}g^{\kappa\nu}+\mathscr{L}\sqrt{-g}\,\delta_{\mu}{}^{\nu}+2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\beta}}g^{\kappa\nu}{}_{,\beta}$$
$$-\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\beta}{}_{,\nu}}g^{\kappa\beta}{}_{,\mu}=0 \tag{6.25}$$

が与えられる。(6.25) は δx^{μ} を含まず，それは恒等式である。そこで一般の座標変換に対して (6.24) が

$$(\delta\mathscr{L})\sqrt{-g}=2\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathscr{L})}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\sigma}}g^{\kappa\nu}(\delta x^{\mu})_{,\nu,\alpha} \tag{6.26}$$

に導くことが帰結される。

積分の領域の境界では全然変化しない任意の座標変換に対して，表面の項は0で

$$\delta\int\left[\left(\frac{c^3}{16\pi G}\right)R+L_F\right]\sqrt{-g}\,d^4x=\delta\int\mathscr{L}\sqrt{-g}\,d^4x \tag{6.27}$$

と書ける。(6.27) の左辺は積分がスカラーであるから0となり，右辺もそうなる。

$$\delta\int\mathscr{L}\sqrt{-g}\,d^4x=\int\delta\mathscr{L}\sqrt{-g}\,d^4x+\int\mathscr{L}\delta(\sqrt{-g}\,d^4x)=0 \tag{6.28}$$

(6.28) の右辺の第2積分は $\sqrt{-g}\,d^4x$ がスカラーであるから0である。右辺の

第1の積分は (6.26) と共に

$$\int \frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} g^{\kappa\nu}(\delta x^\mu)_{,\nu,\alpha} d^4x = 0 \tag{6.29}$$

に導く。

(6.29) を次の形に書いてよい。

$$\int \left(\left[(\delta x^\mu)_{,\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} \right]_{,\nu} - (\delta x^\mu)_{,\alpha} \left[\frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} g^{\kappa\nu} \right]_{,\nu} \right) d^4x = 0 \tag{6.30}$$

(6.30) の第1項は表面積分に書きかえることができ，境界で十分に早く0に近づく微係数をもった δx^μ に対してふたたび0となる。(6.30) の残りの積分は表面積分を含む0となる部分と残りの積分にふたたび変換され，任意の δx^μ に対して

$$\left[\frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} g^{\kappa\nu} \right]_{,\nu,\alpha} = 0 \tag{6.31}$$

となる。(6.31) から通常の発散の形で表された保存量

$$\tau_\mu{}^\nu \sqrt{-g} = (T_\mu{}^\nu + t_\mu{}^\nu)\sqrt{-g} = -2\left(\frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} g^{\kappa\nu} \right)_{,\alpha} \tag{6.32}$$

が与えられる。(6.32) は計算に非常に有用である。

場の方程式 (6.13) に $g^{\kappa\nu}$ をかけ，第1項を二つの項の差として

$$\left[g^{\kappa\nu} \frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} \right]_{,\alpha} - \frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}} g^{\kappa\nu}{}_{,\alpha} - g^{\kappa\nu} \frac{\partial \mathscr{L}\sqrt{-g}}{\partial g^{\kappa\mu}} = 0 \tag{6.33}$$

を書くと，(6.15) および (6.16) の形をふたたび得ることができる。(6.25) を用いて x^ν について微分し，(6.31)を利用すると直接に $t_\mu{}^\nu$ に対する表式(6.15) および (6.16) に導く。

計算を遂行する便宜上

$$\frac{\partial \mathscr{L}_G\sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\tau}} \quad \text{および} \quad \frac{\partial \mathscr{L}_G\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}$$

に対する表式を与える。第一に

$$\frac{\partial (g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta})}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} = g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\beta} \frac{\partial (g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu})}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} \tag{6.34}$$

を評価しよう。(3.73) と (3.74) を用いると

$$\frac{\partial \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} = -\frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \delta_{\alpha}{}^{\tau} \tag{6.35}$$

が与えられる。$g^{\alpha\beta}{}_{;\mu}=0=g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}g^{\beta\nu}+\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}g^{\alpha\nu}$ に注目し，$\beta=\mu$ と置き，(3.74) を用いると

$$\frac{\partial (g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} = -\frac{1}{2}(\delta_{\rho}{}^{\alpha}\delta_{\sigma}{}^{\tau}+\delta_{\sigma}{}^{\alpha}\delta_{\rho}{}^{\tau})+\frac{1}{2}g^{\alpha\tau}g_{\rho\sigma} \tag{6.36}$$

が得られる。これらの関係式を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial (g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \\ &+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}(\delta_{\rho}{}^{\mu}\delta_{\sigma}{}^{\tau}+\delta_{\sigma}{}^{\mu}\delta_{\rho}{}^{\tau})+\frac{1}{2}g^{\mu\tau}g_{\rho\sigma}\right]\end{aligned} \tag{6.37}$$

が結論される。また (6.36) を得るために用いた方法によって

$$\frac{\partial (g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} = -\Gamma^{\tau}{}_{\rho\sigma}\sqrt{-g} \tag{6.38}$$

を得る。

(6.10)，(6.37) および (6.38) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathscr{L}_{G}\sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}} &= \left\{-\Gamma^{\tau}{}_{\rho\sigma}+\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}-g^{\alpha\tau}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta})g_{\rho\sigma}\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}(\delta_{\rho}{}^{\tau}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}+\delta_{\sigma}{}^{\tau}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha})\right\}\left(\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\right)\end{aligned} \tag{6.39}$$

が帰結される。場の方程式 (6.14) を用いると

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{G}\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} = \left(R_{\rho\sigma}-\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}R\right)\left(\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\right)+\left[\frac{\partial \mathscr{L}_{G}\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}{}_{,\tau}}\right]_{,\tau} \tag{6.40}$$

と書くことが許される。

$\mathscr{L}\sqrt{-g}$ が $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta}$ のような微係数を含まないから結果も含みえないこと，したがってこれらの項は (6.40) の右辺でたがいに打ち消し合うであろうという

---

† これは Møller に従う；それは直接の計算より簡単である。変数は $g^{\mu\nu}$ および $g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$ である。$g_{\mu\nu}$ は $g^{\alpha\beta}$ を用いて表してよいが，$g_{\mu\nu,\alpha}$ は $g^{\iota\kappa}$ と $g^{\iota\kappa}{}_{,\nu}$ によってだけ表現されうる。

事実を使って(6.40)の評価は，簡単化される†。次式が得られる。

$$\left(\frac{16\pi G}{c^4}\right)\frac{\partial \mathscr{L}_G\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}}=\Big\{-\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\sigma\alpha}$$
$$+\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta})(g_{\sigma\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\rho\alpha}+g_{\rho\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\sigma\alpha}) \qquad (6.41)$$
$$-\frac{8\pi G}{c^4}g_{\rho\sigma}\mathscr{L}_G+\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\nu}\Big\}\sqrt{-g}$$

(6.15) の正準応力エネルギー擬テンソル $\tau_\mu{}^\nu$ の性質の考察に戻ろう。(6.1) に従って

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int\tau_\mu{}^0\sqrt{-g}\,d^3x=-\int\tau_\mu{}^i\sqrt{-g}\,dS_i \qquad (6.42)$$

と書く。

$g_{\mu\nu}$ が十分に早くローレンツ計量に近づくところの，また $T_\mu{}^\nu$ が局所化されているような孤立系に対して，(6.42) の右辺の表面積分は0となり，積分

$$P_\mu=\frac{1}{c}\int\tau_\mu{}^0\sqrt{-g}\,d^3x \qquad (6.43)$$

は時間と独立である。(τ はいたるところ正則である。) (6.32) から

$$g^{\kappa\nu}\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\kappa\mu}{}_{,\alpha}}$$

が閉じた曲面の上で同じ値をもつ系は同じ P_μ をもつだろうということが帰結される。ローレンツ変換の下で $\tau_\mu{}^0$ は4元テンソルとして変換される。P_μ は特殊相対論のエネルギー運動量4元ベクトルのように変換するだろう(13)。

いま，シュヴァルツシルト粒子に対する $-P_0$ を計算しそれが Mc であることを示そう。これを行うためにまず座標変換

$$r=r'\left(1+\frac{GM}{2c^2r'}\right)^2;\qquad r'=\frac{1}{2}\left[\left(r^2-\frac{2GMr}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}+r-\frac{GM}{c^2}\right] \qquad (6.44)$$

を遂行しよう。座標 r', θ, φ および t は等方座標と呼ばれる。シュヴァルツシルト計量 (5.13) は

$$-ds^2=\left(1+\frac{GM}{2c^2r'}\right)^4(dr'^2+r'^2d\theta^2+r'^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$\frac{-\left(1-\dfrac{GM}{2c^2r'}\right)^2}{\left(1+\dfrac{GM}{2c^2r'}\right)^2}c^2dt^2 \tag{6.45}$$

となる。もし

$$x^2+y^2+z^2=r'^2$$
$$x=r'\cos\varphi\sin\theta$$
$$y=r'\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=r'\cos\theta$$

を導入し，またr'が非常に大きいと仮定するなら，(6.45) は

$$-ds^2\to\left(1+\frac{2GM}{c^2r'}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)-\left(1-\frac{2GM}{c^2r'}\right)c^2dt^2 \tag{6.46}$$

と書かれてよい。シュヴァルツシルトの内部解は場を生ずる物体の中で成り立つからすべての量はいたるところで正則であることに注目しよう。

(6.46), (6.39), (6.43) および (6.32) を使うと

$$-P_0=Mc=\frac{E_0}{c},\quad (P_1=P_2=P_3=0),\quad E_0=Mc^2 \tag{6.47}$$

が導かれる。

他方もしシュヴァルツシルト計量 (5.13) を直接に用いたとすれば

$$E_0=-\infty \tag{6.48}$$

を得たことであろう。

またもし平担な空間の計量

$$-ds^2=dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-c^2dt^2 \tag{6.49}$$

が用いられるなら，エネルギーに対してふたたび無限大という結果が得られる。$\tau_\mu{}^\nu$ はテンソルではないからこれらの結果は驚くべきことではない。

保存則 (6.15) および (6.16) は非常に制限された条件の下でエネルギー運動量4元ベクトルを与えることがわかる。ローレンツ計量は十分に急速に空間的な無限遠に近づき，特別な計量 (6.46) が用いられねばならない。$t_0{}^0$ については，その体積積分だけが意味をもつから，エネルギー密度としての矛盾の

ない解釈は可能でない。領域の内側に影響を与える座標変換はその内側での $t_0{}^0$ の値を変化させるだろう。しかし，(6.46) が成り立つ座標系で計算された体積積分の値は変化しないだろう。エネルギーは単に (6.46) の中の $2G/r'c^4$ の係数であり，(6.46) の中に現れる同じ定数をもつすべての系は内部の記述にかかわらず，同じエネルギーを持つだろう。

6.2　他の保存則

(6.17) のような保存則は，何かが保存されることを表している；与えられた座標系において保存量は簡単な仕方ではエネルギー密度に関係づけられないかもしれない。表式 (6.16) は保存則を満たす擬テンソル密度のクラスの一つにすぎない。$t_\mu{}^\nu\sqrt{-g}$ に通常の発散が 0 であるような任意の量を加えても (6.17) に影響しないだろう。この $t_\mu{}^\nu$ の指定の仕方についての任意性を Landau と Lifshitz(6) が利用して保存する対称擬テンソル $K^{\mu\nu}$ を得た。また Møller (8) はゼロ・ゼロ成分が時間を含まない座標変換の下でスカラーのように変換するところの一つの量を得た。これらの結果を得るためには σ と ν について反対称であるところの量 $U_\mu{}^{\overset{\nu\sigma}{\vee}}$ を導入するのが便利である(7)。この $\vee$ という記号はこの性質を示すためにしばしば用いられる。正準応力エネルギー擬テンソルは (6.50) として $U_\mu{}^{\overset{\nu\sigma}{\vee}}$ を用いて書かれうる。

$$\tau_\mu{}^\nu\sqrt{-g}=U_\mu{}^{\overset{\nu\sigma}{\vee}}{}_{,\sigma} \tag{6.50}$$

は $U_\mu{}^{\overset{\nu\sigma}{\vee}}$ の反対称性の結果として保存則 $(\tau_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}=0$ を満足する。(6.32) を調べ，それが

$$-2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}}g^{\alpha\nu}$$

から通常の発散が 0 になるようなある量だけ異なるにちがいないことに注目して $U_\mu{}^{\overset{\nu\sigma}{\vee}}$ の表式† を探すことができる。もしその量が $a_\mu{}^{\overset{\nu\sigma\beta}{\vee}}{}_{,\beta}$ と書かれるならその発散が 0 になることが保証される。そこで

---

† $U_\mu{}^{\overset{\nu\sigma}{\vee}}$ はときどき超ポテンシャルと呼ばれる。

$$-2\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}}g^{\alpha\nu}=U_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}+a_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma\beta}}{}_{,\beta} \tag{6.51}$$

と書く。

(6.39) によって次の評価が可能となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}}g^{\alpha\nu}=&\Big\{-\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}g^{\nu\alpha}+\frac{1}{2}(\delta_{\mu}{}^{\sigma}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha}{}^{\sigma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta})g^{\nu\alpha}\\&+\frac{g_{\mu\alpha}}{2}(g^{\rho\tau}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\tau}-g^{\sigma\beta}\Gamma^{\kappa}{}_{\beta\kappa})g^{\alpha\nu}\Big\}\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{6.52}$$

ここで

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}=g_{,\beta}/2g,\ d(g_{\nu\kappa}g^{\nu\mu})=0\quad \text{および}\quad g_{\nu\kappa,\alpha}g^{\nu\mu}=-g_{\nu\kappa}g^{\nu\mu}{}_{,\alpha}$$

であることを思い起こし，項を再配列すると (6.52) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}}g^{\alpha\nu}=&\Big[\frac{1}{2\sqrt{-g}}g_{\mu\alpha}[g(g^{\nu\alpha}g^{\sigma\beta}-g^{\sigma\alpha}g^{\nu\beta})]_{,\beta}\\&-\frac{1}{2}(\sqrt{-g}\,\delta_{\mu}{}^{\sigma}g^{\beta\nu}-\sqrt{-g}\,\delta_{\mu}{}^{\beta}g^{\nu\sigma})_{,\beta}\Big]\frac{c^4}{16\pi G}\end{aligned} \tag{6.53}$$

と書くことが許される。(6.53) と (6.51) を比較して

$$U_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}=\frac{c^4}{16\pi G\sqrt{-g}}g_{\mu\alpha}[(-g)(g^{\nu\alpha}g^{\sigma\beta}-g^{\sigma\alpha}g^{\nu\beta})]_{,\beta} \tag{6.54}$$

$$a_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma\beta}}{}_{,\beta}=\frac{c^4}{16\pi G}(\sqrt{-g}\,[\delta_{\mu}{}^{\sigma}g^{\nu\beta}-\delta_{\mu}{}^{\beta}g^{\sigma\nu}])_{,\beta} \tag{6.55}$$

ということがわかる。これらの量は線形な（擬似）変換の下でテンソル密度のように変換し，擬似テンソル密度と呼ばれる。

角運動量保存則の定式化には，指標 α と β について対称であるところの $\tau_{\alpha\beta}$ に相当する量を持つことが（必要という訳ではないが）便利である(4)。そういう量は $U_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}$ から次のようにして得ることができる。$U^{\underset{\vee}{\mu\nu\kappa}}{}_{,\kappa}$ を考えてみよう。

$$\begin{aligned}U^{\underset{\vee}{\mu\nu\kappa}}{}_{,\kappa}=(g^{\mu\beta}U_{\beta}{}^{\underset{\vee}{\nu\kappa}})_{,\kappa}=&\Big[[-g(g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}-g^{\kappa\mu}g^{\nu\rho})]_{,\rho}[(-g)^{-\frac{1}{2}}]_{,\kappa}\\&+(-g)^{-\frac{1}{2}}[-g(g^{\nu\mu}g^{\kappa\rho}-g^{\kappa\mu}g^{\nu\rho})]_{,\rho,\kappa}\Big]\frac{c^4}{16\pi G}\end{aligned} \tag{6.56}$$

(6.56) の最後の項は μ と ν について対称であるが第1項はそうでない。もし (6.54) の前面にある因数 $(-g)^{-\frac{1}{2}}$ を取り除くなら，修正された量

$$h^{\mu\underset{\vee}{\nu\sigma}}=[-g(g^{\nu\mu}g^{\sigma\rho}-g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho})]_{,\rho}\left(\frac{c^4}{16\pi G}\right) \tag{6.57}$$

は ν と μ について対称な発散をもつだろう。$\bar{t}^{\mu\nu}$ をランダウ・リフシッツの重力擬テンソルを示すのに用い，$K^{\mu\nu}$ をそれらを結合した擬テンソル密度に用いる。Landau と Lifshitz は (6.57) を

$$K^{\mu\nu}=(T^{\mu\nu}+\bar{t}^{\mu\nu})(-g)=h^{\mu\underset{\vee}{\nu\rho}}{}_{,\rho} \tag{6.58}$$

と書くために用いる。$K^{\mu\nu}$ はそこで $h^{\mu\underset{\vee}{\nu\rho}}$ が ν と ρ について反対称であることの結果として保存則を満たす。積分すると

$$\mathscr{P}^{\mu}=\frac{1}{c}\int(-g)[T^{\mu 0}+\bar{t}^{\mu 0}]dx^1dx^2dx^3 \tag{6.59}$$

で与えられる量 $\mathscr{P}^{\mu}$ を生ずる。

1次変換の下で $\mathscr{P}^{\mu}$ は4元ベクトルとしてよりもむしろ4元ベクトル密度として変換する。場の方程式と $h^{\mu\underset{\vee}{\nu\rho}}$ の定義を利用して，Landau と Lifshitz は $\bar{t}^{\mu\nu}$ に対する次の公式を与える。

$$\begin{aligned}\bar{t}^{\mu\nu}=\frac{c^4}{16\pi G}\{&(2\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho})(g^{\mu\beta}g^{\nu\gamma}-g^{\mu\nu}g^{\beta\gamma})\\&+g^{\mu\beta}g^{\gamma\alpha}(\Gamma^{\nu}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\alpha}+\Gamma^{\nu}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\rho}-\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho})\\&+g^{\nu\beta}g^{\gamma\alpha}(\Gamma^{\mu}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\pi}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho})\\&+g^{\beta\gamma}g^{\alpha\rho}(\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\gamma\rho}-\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\rho})\}\end{aligned} \tag{6.60}$$

ふたたび $K^{\mu\nu}$ は，要求する結果を得るためには大きい距離のところで等方的な計量に近づくような特別な座標系が要求されるという望ましくない性質をもっている。ふたたびまた K^{00} の局所化されたエネルギー密度としての矛盾のない解釈は可能でない。

この欠点を救うために Møller は，もう一つの3階の擬テンソル密度 $V_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}$ を (6.51) の右辺に加えてよいことに注目した。$V_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}$ が ν と σ について反対称であるかぎり保存則の成立に影響を与えることはない。Møller は一つの関数 $\chi_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}$ を

$$\chi_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}=U_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}}+V_{\mu}{}^{\underset{\vee}{\nu\sigma}} \tag{6.61}$$

によって定義することを暗示した。そのとき応力エネルギー擬テンソル $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$

は

$$\Lambda_\mu{}^\nu\sqrt{-g}=[(T_\mu{}^\nu+t_\mu{}^\nu)\sqrt{-g}]=\chi_\mu{}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} \tag{6.62}$$

によって与えられる。ここで $t_\mu{}^\nu$ は $\Lambda_\mu{}^\nu$ に相当する重力擬テンソルである。付加的な擬テンソル密度 $V_\mu{}^{\nu\sigma}$ はいまや求めることができて，それは $\Lambda_\mu{}^\nu$ に次の性質を与えるだろう。大きい距離で“ローレンツ”計量 (6.46) を用いることができる物理系に対しては

$$\int\Lambda_\mu{}^0\sqrt{-g}\,d^3x=\int\tau_\mu{}^0\sqrt{-g}\,d^3x \tag{6.63}$$

$\Lambda_0{}^\sigma$ は時間座標を含まないすべての座標変換のもとで4元ベクトルのように振舞うべきである。これから任意の空間的変換のもとで $\Lambda_0{}^0$ はスカラーであり，$\Lambda_0{}^i$ は3元ベクトルであることになる。これらの要求を満たす $V_\mu{}^{\nu\sigma}$ を見いだすために Mφller は時間座標を含まない任意の無限小変換の下での $\tau_0{}^0\sqrt{-g}$ の変換性を調べた。これはどのような方法で $\tau_0{}^0\sqrt{-g}$ が空間的な座標変換の下でスカラー密度の要求を満足することに失敗するかを示している。(6.46)の場合に $V_0{}^{\nu\sigma}$ に導くところの，$g_{\mu\nu}$ およびそれらの1次微係数を結合したもので，それは $r\to\infty$ に対して

$$1/r^2$$

よりも早く0になるようなものが考慮されねばならない。このようにして Mφller は関数

$$V_\mu{}^{\nu\sigma}=U_\mu{}^{\nu\sigma}-\delta_\mu{}^\nu U_\alpha{}^{\alpha\sigma}+\delta_\mu{}^\sigma U_\alpha{}^{\alpha\nu} \tag{6.64}$$

を提案した。(6.54) を用いて関数 $V_\nu{}^{\nu\sigma}$ および $\chi_\mu{}^{\nu\sigma}$ に対する表式が計算されてよい。

$$\chi_\mu{}^{\nu\sigma}=\frac{\sqrt{-g}\,c^4}{8\pi g}(g_{\mu\beta,\alpha}-g_{\mu\alpha,\beta})g^{\nu\alpha}g^{\sigma\beta} \tag{6.65}$$

$\Lambda_0{}^\nu$ を計算するためには

$$\chi_0{}^{\nu\sigma}=\frac{\sqrt{-g}\,c^4}{8\pi g}(g_{0\beta,\alpha}-g_{0\alpha,\beta})g^{\nu\alpha}g^{\sigma\beta} \tag{6.66}$$

を必要とするだろう。

どこでも時間座標を含まないがそれ以外の点では任意の座標変換群のもとで

の (6.66) および $\Lambda_0{}^{\nu}$ の振舞を調べてみる。$g_{0\alpha}$ は4元ベクトルのように変換される。任意のベクトル B_{μ} に対して $B_{\mu;\nu}-B_{\nu;\mu}=B_{\mu,\nu}-B_{\nu,\mu}$ であることを思いおこすと，(6.66) のカッコはテンソルのように変換することがわかる。そこで (3.78) から $\chi_0{}^{0\mu}{}_{,\mu}=\Lambda_0{}^{0}\sqrt{-g}$ はスカラー密度のように変換することが帰結される。$\chi_0{}^{i\mu}$ は反対称テンソル密度のように変換され，そこで $\Lambda_0{}^{i}$ は3元ベクトルのように変換することが導かれる。このようにして Møller のテンソル (6.62) および (6.65) が求める変換性をもつことがわかる。

いま，Peter G. Bergmann[9] に従って無限小座標変換と保存量との結びつきを簡単に考察しよう。無限小変換

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+\delta x^{\mu} \tag{6.67}$$

を考えてみよう。量 M^{ρ} は

$$M^{\rho}=(\delta x^{\alpha}U_{\alpha}{}^{\rho\eta})_{,\eta} \tag{6.68}$$

によって定義され，$M^{\rho}{}_{,\rho}=0$ を満足する。δx^{α} は任意であるから，(6.68) がそういう無限個の法則を表していることは明白である。もし δx^{α} を一組の定数であるようにえらぶなら，Einstein の定式化が得られる。もし k_{β} を一組の定数として $\delta x^{\alpha}=g^{\alpha\beta}k_{\beta}\sqrt{-g}$ とえらぶなら，Landau-Lifshitz の表式が出てくる。角運動量の保存則は，$J_{\beta\alpha}$ をふたたび一組の定数として

$$\delta x^{\alpha}=(g^{\alpha\beta}x^{\gamma}-g^{\alpha\gamma}x^{\beta})J_{\beta\gamma}\sqrt{-g} \tag{6.69}$$

と選ぶことによって得ることができる。任意のベクトル場が (6.68) の中で用いられてよいことは明らかである。

Komar[10] は，いかにして保存則の系をテンソル形に組み立てるべきかを示した。Møller の結果から出発して彼は

$$\begin{aligned} D^{\rho}\sqrt{-g}&=(\delta x^{\alpha}U_{\alpha}{}^{\rho\beta}+\delta x^{\alpha}V_{\alpha}{}^{\rho\beta})_{,\beta} \\ &=\left[\frac{c^4}{8\pi G}\delta x^{\beta}g^{\rho\alpha}g^{\delta\iota}(g_{\beta\iota,\alpha}-g_{\beta\alpha,\iota})\sqrt{-g}\right]_{,\delta} \end{aligned} \tag{6.70}$$

と書く。渦の場

$$W^{\rho}\sqrt{-g}=\left\{\frac{c^4}{8\pi G}g^{\rho\iota}g^{\alpha\beta}[(\delta x^{\eta})_{,\iota}g_{\eta\beta}-(\delta x^{\eta})_{,\beta}g_{\eta\iota}]\sqrt{-g}\right\}_{,\alpha} \tag{6.71}$$

を (6.70) に加えると

$$Q^{\iota}=\frac{c^4}{8\pi G}(\delta x^{\iota;\beta}-\delta x^{\beta;\iota})_{;\beta} \tag{6.72}$$

が得られる。

(6.72) は (3.75) から保存されている。そうしてそれはテンソル形をもつ。(6.70) と (6.71) を調べると $\delta x^{\iota}=\delta_0{}^{\iota}$ に対して (6.72) は Mφller の結果を与えることが示される。

6.3　保存則についての一層の注意

これまでの議論から，物質エネルギーが十分に局所化されていて“ローレンツ”計量 (6.46) が大きい距離で用いられてよいような状況では全エネルギーは十分よく定義され，ここで与えられた表式のいくつかを用いて計算可能である。Mφller によって提案された擬テンソルは計量 (6.46) を要求しない。そうしてゼロ・ゼロ成分は同じ時間座標をもつところのすべての座標系において同じである。Landau-Lifshitz の結果は対称な量である。

たくさんの他の応力エネルギー擬テンソルを組み立ててよいが，Dirac は運動方程式を解くことにおいて特別なものが有用度の高い可能性があることを注意した。輻射の問題において暗示された他の表式はこのテキストの中で後に述べられる。輻射についての章において，一般相対論におけるエネルギーの問題は未だ完全に満足な仕方では解かれていないという結論に導くような，ある他の困難について注意するだろう。

Peter G. Bergmann は，恒等式であるところの保存則と場の方程式が満たされるとき成り立つものとの間の区別をつけている。ビアンキ恒等式あるいは $U_{\nu}{}^{\check{\sigma\mu}}{}_{,\sigma\mu}=0$ のような恒等式は“強い”法則と呼ばれる。場の方程式が満たされるときにのみ成立する関係式は“弱い”法則と呼ばれる。

完全に対称な量であるところの4階のテンソルが Bel(11) によって発見されたことは興味深い。これを組み立てるためには最初に双対 (dual) テンソルの概念を必要とする。与えられたテンソルが $A^{\mu\nu}$ であるならその双対 (dual) は

$$^*A_{\mu\nu}=\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta}\sqrt{-g}/2 \tag{6.73}$$

を書くことによって作り上げることができる。ここで $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ はふたたびレヴィ・

チヴィタのテンソル密度である。リーマン・テンソルの双対は

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}\sqrt{-g}/2 \tag{6.74}$$

である。ベルのテンソルは

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\mu\nu\delta}R_{\beta}{}^{\mu\nu}{}_{\gamma}+{}^*R_{\alpha\mu\nu\delta}{}^*R_{\beta}{}^{\mu\nu}{}_{\gamma} \tag{6.75}$$

であり，関係式

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta}=0 \tag{6.76}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{\alpha\delta}=0 \tag{6.77}$$

は $R_{\mu\nu}$ が場の方程式を満たすとすれば満足される。これらの性質は I. Robinson によってそのまだ出版されていない仕事の中で確立された。

さらに $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ はすべての指標について対称である。“保存”則 (6.76) は以前に用いられた3次元積分の組み立てには役に立たない。ベルのテンソルは重力輻射の問題においてその性質を利用するために研究されつつある。

文 献

1. A. Einstein, *Berlin Ber*. **42**, 1111 (1916).

2, P. G. Bergmann, *Phys. Rev*. **75**, 680 (1949).

3. P. G. Bergmann and R. Schiller, *Phys. Rev*. **89**, 4 (1953).

4. P. G. Bergmann and R. Thomson, *Phys. Rev*. **89**, 400 (1953).

5. J. N. Goldberg, *Phys. Rev*. **111**, 315 (1958)

6. L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1951, p. 316.

7. P. von Freud, *Ann. Math*. 40, 417 (1939).

8. C. Mϕller, *Ann. Phys*. **4**, 347 (1958).

9. P. G. Bergmann, *Phys. Rev*. **112**, 287 (1958).

10. A. Komar, *Phys. Rev*. **113**, 934 (1959).

11. L. Bel, *Compt. rend*. **248**, 1297 (1959).

12. J. G. Fletcher, *Rev. Mod. Phys*. **32**, 65 (1960).

13. W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press, New York, 1954, 3rd ed., p. 17.

第7章
重　力　波

7.1 弱い場の解

一般相対論の中心的課題の一つは常に重力輻射の問題であった。重力波はこれまでのところ観測されていない。最近にいたるまで(18)等方的な重力波を表現するような重力場の方程式の厳密な解は知られていなかった。これらの理由のためにたくさんの理論的な仕事が過去40年間にこの話題について現れている。いくつかの実験的な研究がいまでは実行可能に見えることが後でわかるだろう。ある理論的な争点が近年になって解決され，多数の物理学者にとって一般相対論は実際に重力波の存在を予言しているのだと結論することが可能となってきた。

1916年にアインシュタイン(1)は場の方程式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{7.1}$$

の弱い場の解を研究した。この式は

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

と仮定することによって得られる。ここに $\delta_{\mu\nu}$ はローレンツの計量テンソルで $h_{\mu\nu}$ は1次の量である。$h_\mu{}^\lambda$ と h は

$$h_\mu{}^\lambda=\delta^{\lambda\alpha}h_{\mu\alpha} \tag{7.3}$$

$$h=h_\alpha{}^\alpha=\delta^{\sigma\lambda}h_{\sigma\lambda} \tag{7.4}$$

によって定義される。

リッチのテンソルはクリストッフェルの記号を用いて

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^\beta{}_{\mu\nu,\beta}-\Gamma^\beta{}_{\mu\beta,\nu}+\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} \tag{7.5}$$

として与えられる。(7.2)，(7.3)，(7.4) を用いると $R_{\mu\nu}$ を1次までとって

$$R_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\delta^{\sigma\lambda}h_{\mu\nu,\sigma\lambda}-\frac{1}{2}(h_{,\mu\nu}-h_{\mu}{}^{\beta}{}_{,\nu\beta}-h^{\beta}{}_{\nu,\mu\beta}) \tag{7.6}$$

と書くことが可能となる。(7.6) の最後の三つの項は

$$h_{,\mu\nu}-h_{\mu}{}^{\beta}{}_{,\nu\beta}-h^{\beta}{}_{\nu,\mu\beta}=\left(\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\beta}h-h_{\mu}{}^{\beta}\right)_{,\beta\nu}+\left(\frac{1}{2}\delta_{\nu}{}^{\beta}h-h_{\nu}{}^{\beta}\right)_{,\beta\mu} \tag{7.7}$$

の形に配列できる。

(7.7) は座標条件を

$$\left(h_{\mu}{}^{\beta}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\beta}\right)_{,\beta}=0 \tag{7.8}$$

とえらぶことによって0になるようにとることができる。

$R_{\mu\nu}$ はそうすると (7.6) の第一項だけだから成り立つことになり，場の方程式は

$$-\frac{1}{2}\delta^{\sigma\lambda}h_{\mu\nu,\sigma\lambda}+g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}\delta^{\sigma\lambda}h_{,\sigma\lambda}\right]=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{7.9}$$

と書くことができる。(7.9) を用いるときに右辺のすべての成分が同じオーダーの量とは限らないから注意が必要となる。いま

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}=h_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}h \tag{7.10}$$

を定義する。座標条件 (7.8) は

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{7.11}$$

と書かれる。(7.9) の中の指標を上に上げて，(7.10) を用いると

$$\Box\varphi_{\mu}{}^{\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu}{}^{\nu} \tag{7.12}$$

が得られる。(7.12) の解は電気力学でよく知られており

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}(\boldsymbol{r},t)=\frac{4G}{c^4}\int\frac{(T_{\mu}{}^{\nu})_{\text{遅延}}\,d^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{7.13}$$

と書ける。

ここで $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ は源の点から場の点までの距離である。以前に注意したように関係式 (7.12) は直接にニュートンの重力法則から得られ，その中で ∇^2 は $\Box$ でおきかえられる；保存則 $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}\approx 0$ はそのとき (7.11) を生ずる。

以前に Pauli と Fierz(3) は静止質量が0でスピンが2であるような粒子に対してどんな相対論的波動方程式が適当であるかという問題を考察した。いまスピンSに対する相対論では $2(2S+1)$ 個の成分が必要とされ，そこで2階テンソルが要求される。彼らは方程式

$$\Box\psi_{\mu}{}^{\nu}=0 \tag{7.14}$$

ただし補助条件

$$\psi_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{7.15}$$

をつけることを提案した。

これらの方程式は真空に対して (7.11) および (7.12) と同じであるから重力粒子はスピン2をもつことが期待される。唯一の利用できる方向は運動の方向であるから，スピン角運動量は運動方向に整列されねばならないことが帰結される。重力は無限大の到達距離をもつから，重力粒子の静止質量は0でなければならないことが結論される†。

いま，表式 (7.11) がどんな条件の下で満足されうるかを考える。無限小の座標変換

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\xi^{\alpha}(x) \tag{7.16}$$

を遂行すると考えよう。第1近似ではこの式に

$$x^{\alpha}=x'^{\alpha}-\xi^{\alpha}(x') \tag{7.17}$$

と書くことができる。変換された計量テンソルはそのとき

$$g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-g_{\alpha\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\mu}-g_{\beta\mu}\xi^{\beta}{}_{,\nu} \tag{7.18}$$

によって与えられる。同様に

$$h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\delta_{\alpha\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\mu}-\delta_{\beta\mu}\xi^{\beta}{}_{,\nu} \tag{7.19}$$

$$\varphi'_{\mu}{}^{\alpha}=\delta^{\alpha\nu}[\varphi_{\mu\nu}-\delta_{\beta\nu}\xi^{\beta}{}_{,\mu}-\delta_{\beta\mu}\xi^{\beta}{}_{,\nu}+\delta_{\mu\nu}\xi^{\gamma}{}_{,\gamma}] \tag{7.20}$$

$$\varphi'_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}-\delta^{\rho\sigma}\xi_{\mu,\rho\sigma} \tag{7.21}$$

もし座標条件 (7.11) が満足されないなら

$$\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}\neq 0 \tag{7.22}$$

となる。

---

† もし力が静止質量 m をもつ粒子によって伝達されるなら，湯川ポテンシャル $\varphi\sim(e^{-mcr/\hbar}/r)$ が適切である。これは $m\to 0$ のときのみ無限大の到達距離をもつ。

(7.21) は無限小座標変換が遂行されると

$$\varphi'_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=0 \tag{7.23}$$

となることを述べている。ただし

$$\Box\xi_{\mu}=\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{7.24}$$

とする。

他方もし $\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=0$ であるなら，(7.24) に従って関数 ξ_{μ} は波動方程式を満たすものと仮定して，この条件を保持するような任意の座標変換を遂行できる。

(7.12) の考察に戻ろう。自由空間ではこれらの方程式は

$$\Box\varphi_{\mu}{}^{\nu}=0 \tag{7.25}$$

で与えられる $\varphi_{\mu}{}^{\nu}$ をもった波を表現する。$h_{\mu\nu}$ あるいは $\varphi_{\mu\nu}$ の何個の独立な成分が (7.25) の平面波の解を記述するために必要とされるかを質問することは興味深い。最初に任意の強さの局所的に平面状の撹乱の場合を議論し，それから弱い場の場合にこの結果を応用するのが便利であることがわかる。

7.2 局所的に平坦な任意の強さの波に対するリーマンテンソル

伝播の方向に垂直な方向での空間微係数がゼロであるような重力波があると考えよう。したがってそういう波は局所的に平面である。この場合に任意の与えられた点においてリーマンテンソルのすべての成分が $g_{\mu\nu}$ の3個の成分の微係数を用いて書くことができることを示そう。それらは伝播方向に垂直な面の中での間隔を記述する。与えられた時空点においてクリストッフェル記号が0となりそこでの計量はローレンツの値をもつように測地座標系を導入しよう。リーマンテンソルは

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma}+g_{\beta\gamma,\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma,\beta\delta}-g_{\beta\delta,\alpha\gamma}) \tag{7.26}$$

となる。

x^1 方向を伝播方向であるとしよう；そのとき x^2 および x^3 に関する $g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu,\alpha}$ の偏微係数は0となる。(7.26) を調べると $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の成分を三つのグループに書くことができることが示される。

$$R_{2020}=-\frac{1}{2}g_{22,00} \qquad R_{1220}=\frac{1}{2}g_{22,10} \qquad R_{1212}=-\frac{1}{2}g_{22,11}$$

$$R_{2030}=-\frac{1}{2}g_{23,00} \qquad R_{1230}=\frac{1}{2}g_{23,10} \qquad R_{1213}=-\frac{1}{2}g_{23,11} \qquad (7.27)$$

$$R_{3030}=-\frac{1}{2}g_{33.00} \qquad R_{1320}=\frac{1}{2}g_{23,10} \qquad R_{1313}=-\frac{1}{2}g_{33,11}$$

$$R_{1330}=\frac{1}{2}g_{33,10}$$

$$R_{1223}=0 \qquad R_{2323}=0$$

$$R_{1323}=0 \qquad R_{2320}=0 \qquad (7.28)$$

$$R_{1023}=0 \qquad R_{2330}=0$$

$$R_{1030}=-\frac{1}{2}g_{13,00}+\frac{1}{2}g_{30,10} \qquad R_{1020}=-\frac{1}{2}g_{12,00}+\frac{1}{2}g_{20,10}$$

$$R_{1310}=-\frac{1}{2}g_{30,11}+\frac{1}{2}g_{13,10} \qquad R_{1210}=-\frac{1}{2}g_{20.11}+\frac{1}{2}g_{12,10} \qquad (7.29)$$

$$R_{1010}=-\frac{1}{2}g_{11,00}+g_{10,10}-\frac{1}{2}g_{00,11}$$

真空中では $R_{\mu\nu}=0$ である。与えられた点において (7.27), (7.28) および (7.29) と共にローレンツ計量を用いると次式が得られる。

$$R_{12}=R_{1020}=0 \qquad R_{13}=R_{1030}=0$$

$$R_{20}=R_{1210}=0 \qquad R_{30}=R_{1310}=0$$

$$R_{11}=R_{1010}-R_{1313}-R_{1212}=0 \qquad R_{10}=R_{1220}+R_{1330}=0 \qquad (7.30)$$

$$R_{22}=R_{2020}-R_{1212}=0 \qquad R_{23}=R_{2030}-R_{1213}=0$$

$$R_{33}=R_{3030}-R_{1313}=0 \qquad R_{00}=R_{3030}+R_{2020}+R_{1010}=0$$

R_{12}, R_{20}, R_{13} および R_{30} が 0 になることを示す上の方程式は (7.29) に与えられる $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の最初の四つの値が 0 になることを意味する。R_{11}, R_{22}, R_{33} および R_{00} が 0 になることを示す方程式は (7.29) の中の最後の表式 R_{1010} を求めるために結合されて, 0 であることがわかる。そこでリーマンテンソルの唯一の 0 でない成分は10個の成分 (7.27) であり, これらはまったく g_{22}, g_{23} および g_{33} によって与えられる。R_{11}, R_{22}, R_{33} および R_{00} に対する表式 (7.30) は

$$g_{22,00}+g_{33,00}=0 \tag{7.31}$$

にも導く。

(7.31) は2成分 g_{22} および g_{33} の要求された2階微係数が独立でないことを述べている。弱い場の近似では (7.26) はいたるところで成り立つ。そこですべての点においてリーマンテンソルは (7.31) を条件として h_{22}, h_{33} および h_{23} を用いて書くことができる。そのとき座標変換を遂行して $h_{\mu\nu}$ のすべての成分を“横波の”成分を別としていたるところで変換の結果消し去りうることが出てくる。このことは (7.24) を満たす無限小座標変換を用いて，比較的まともな仕方でなされうる。次の章において波の進路の中で近接した位置にある自由粒子の間の相対的な変位は波の伝播方向に直角な方向だけに生ずること示されるだろう。

7.3　源の体積積分の近似的評価

弱い場の解の積分表現 (7.13) に戻る。これらの成分は近似のある段階において T_{00} を用いて書かれてよい。応力エネルギーテンソルは第1近似において保存則

$$T_{0k,k}-T_{00,0}=0 \tag{7.32}$$

$$T_{jk,k}-T_{j0,0}=0 \tag{7.33}$$

を満足する。(7.33) に x^i をかけ，全空間で（部分）積分し，無限遠で0となる表面積分の項を無視する。これは対称な式

$$\int T_{ij}d^3x=-\frac{1}{2}\left[\int(T_{i0}x^j+T_{j0}x^i)d^3x\right]_{,0} \tag{7.34}$$

に書かれる。(7.32) には x^ix^j をかけてふたたび無限遠で0となる表面項を無視し，全空間の上で積分する；結果は

$$\left[\int T_{00}x^ix^jd^3x\right]_{,0}=-\int[T_{i0}x^j+T_{j0}x^i]d^3x \tag{7.35}$$

である。

表式(7.34) と (7.35) によって

$$\int T_{ij}d^3x=\frac{1}{2}\left[\int T_{00}x^ix^jd^3x\right]_{,00} \tag{7.36}$$

を書くことが可能となる。

(7.36) を用いると，質量やエネルギーの分布が応力の分布よりも容易に取り扱われるようなある種の計算を容易に行うことができる。関係式 (7.36) は遅延効果を無視しており，波長に比べて大きい源が含まれているところでは成り立たない。

波長に比べて小さい領域の中にある源に対しては，(7.36) は最低次の0でない近似において $\varphi_\mu{}^\nu$ のすべての空間指標をもつ成分を計算するために用いられてよい。そのとき座標条件の使用によって残りの成分の決定が許される。ある場合にこれは (7.13) を直接に使用するよりも簡単な手続きである。

ある粒子に対して遅延効果は異なった体積要素が異なった時刻にとられることを意味するという事実を考慮して，体積が0に近づく極限において積分を評価することが必要である。電気力学におけるように静止している粒子の結果から出発し，それから動いている粒子に一般化するのが一層直接的である。止まっている質量 m の粒子は

$$\varphi_{00}(\boldsymbol{r})=\frac{4Gm}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

をもつ。線形の近似では動いている粒子に対する一般化は

$$\varphi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},t)=\frac{4GmU'_\mu U'_\nu}{c^2U'_\alpha(r'^\alpha-r^\alpha)} \tag{7.13a}$$

でなければならないことが推察できる。ただし，いま U'_μ は粒子の4元速度，m は静止質量，そうして

$$r'^\alpha-r^\alpha=(r'^i-r^i),\ c(t'-t);\qquad t'=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$$

(7.13a) は次の形に書かれる。

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{r},t)=\frac{4Gmv'_iv'_j}{c^4|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\sqrt{1-v'^2/c^2}\left(1-\dfrac{v'_i(r^i-r'^i)}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)}$$

$$\varphi_{0i}(\boldsymbol{r},t)=\frac{-4Gmv_i'}{c^3|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\sqrt{1-v'^2/c^2}\left(1-\dfrac{v'_i(r^i-r'^i)}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)}$$

$$\varphi_{00}(\boldsymbol{r},t)=\frac{4Gm}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\sqrt{1-v'^2/c^2}\left(1-\dfrac{v'_i(r^i-r'^i)}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)} \tag{7.13b}$$

ここで v'_i は粒子の通常の速さである。

7.4 エネルギー束とエネルギー密度に対する弱場近似

応力エネルギーテンソルの共変発散は，場の方程式とビアンキ恒等式の結果によって0となる。これは（3.79）を用いて

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(T_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta}=0 \tag{7.37}$$

の形に表してよい。

応力エネルギー擬テンソル密度 $t_\mu{}^\nu\sqrt{-g}$ は応力エネルギーテンソル密度に

$$(T_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}+(t_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}=0 \tag{7.38}$$

によって関係づけられる。

$t_\mu{}^\nu$ は第6章の結果を用いて計算できるが，弱い場に対しては（7.37）と（7.38）を比較して

$$(t_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}=-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\approx-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta} \tag{7.39}$$

と書く方がもっと直接的である。(7.39）の形は，（7.12）に $h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ をかけて

$$h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\Box\varphi_{\alpha\beta}=-\frac{16\pi G}{c^4}h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}T_{\alpha\beta} \tag{7.40}$$

を得ることを暗示している。(7.10）と（7.39）を利用すると

$$h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\left[h_{\alpha\beta,\nu}{}^{,\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{,\nu}{}^{,\nu}\right]=\frac{32\pi G}{c^4}(t_\mu{}^\nu\sqrt{-g})_{,\nu} \tag{7.41}$$

に導かれる。

$$\begin{aligned}&h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\left[h_{\alpha\beta,\nu}{}^{,\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{,\nu}{}^{,\nu}\right]\\&=\left[h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}h_{\alpha\beta}{}^{,\nu}-\frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu h_{\alpha\beta,\rho}h^{\alpha\beta,\rho}-\frac{1}{2}h_{,\mu}h^{,\nu}+\frac{1}{4}h_{,\rho}h^{,\rho}\delta_\mu{}^\nu\right]_{,\nu}\end{aligned} \tag{7.42}$$

と書いてよい。(7.42）と（7.41）を比較すると

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{-g}=\frac{c^4}{64\pi G}\left[2h^{\alpha\beta}{}_{,\mu}h_{\alpha\beta}{}^{,\nu}-h_{,\mu}h^{,\nu}+\delta_\mu{}^\nu\left(\frac{1}{2}h_{,\rho}h^{,\rho}-h_{\alpha\beta,\rho}h^{\alpha\beta,\rho}\right)\right] \tag{7.43}$$

(7.10) を縮約すると

$$\varphi_\alpha{}^\alpha=-h_\alpha{}^\alpha \tag{7.44}$$

になる。(7.44) と (7.10) を用いると代わりの形

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{-g}=\frac{c^4}{64\pi G}\left[2\varphi^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\varphi_{\alpha\beta}{}^{,\nu}-\varphi_{,\mu}\varphi^{,\nu}+\delta_\mu{}^\nu\left(\frac{1}{2}\varphi_{,\rho}\varphi^{,\rho}-\varphi_{\alpha\beta,\rho}\varphi^{\alpha\beta,\rho}\right)\right] \tag{7.45}$$

が得られる。

7.5　直線状の質量四重極振動子

いま，直交座標系の原点にある線形質量四重極振動子を考えよう。質量の運動はx^3軸に沿っている。Iを慣性モーメントの時間に依存する部分のピークの値としよう。(7.12) の解を

$$\varphi_{33}=\frac{2\omega^2GI}{c^4r}\cos\frac{\omega}{c}[x^0-r] \tag{7.46}$$

の形に書くために (7.36) を用いることができる。

x^3方向の振動は単に成分φ_{33}，φ_{30}およびφ_{00}だけを生ずる。座標条件$\varphi_\mu{}^\nu{}_{,\nu}=0$は，座標条件に適合していることを知っているとすればφ_{30}とφ_{00}を計算するために用いられる。もし源の近傍にあるエネルギー密度が空間が著しく曲がるほどに大きくないなら，ローレンツ計量の保存則 $T_\mu{}^\nu{}_{,\nu}=0$ がよい近似で成り立つであろう。もし源が小さな領域の中にあり遅延効果が重要でないなら，(7.12) から座標条件は実際に満足されることが結論される。そのとき

$$\varphi_3{}^3{}_{,3}+\varphi_3{}^0{}_{,0}=0 \tag{7.47}$$

$$\varphi_0{}^3{}_{,3}+\varphi_0{}^0{}_{,0}=0 \tag{7.48}$$

と書いてよい。

観測者がx^3軸と角θをなす動径方向の線に沿って位置しているとしよう。(7.46)，(7.48) および (7.47) が

$$\varphi_{00}=\cos^2\theta\varphi_{33};\qquad \varphi_{03}=-\cos\theta\varphi_{33} \tag{7.49}$$

を与える。

φ_{00} および φ_{03} を直接に（7.12）あるいは（7.13a）から計算することもできただろう；しかしそのためには遅延効果や復元力を供給するところの振動子の部分にあるエネルギーについてもっと注意深い考慮を必要とするだろう。

輻射の工率は次のようにして計算できる。われわれは

$$\frac{c\partial}{\partial x^0}\int T_0{}^0\sqrt{-g}\,d^3x \tag{7.50}$$

を必要とする。保存則を使って（7.50）は

$$\begin{aligned}-\frac{c\partial}{\partial x^0}\int\sqrt{-g}\,T_0{}^0 d^3x - c\int\sqrt{-g}\,T_0{}^i dS_i\\ =\frac{c\partial}{\partial x^0}\int\sqrt{-g}\,t_0{}^0 d^3x + c\int\sqrt{-g}\,t_0{}^i dS_i\end{aligned} \tag{7.51}$$

と書かれてよい。第2と第4の積分は閉じた（2次元の）曲面の上で行われる。曲面は原点の近傍にあると仮定され，もしわれわれを取り囲んでいる曲面が源から遠いなら，$T_0{}^i$ は源の外側で0であるから（7.51）の第2の積分は0になるだろう。第3の積分は時間について周期的であり，最後の積分は源のエネルギーのゆっくりした減少を与えるだろう。(7.46)，(7.45）および（7.49）を利用すると（15.17）から時間で平均された輻射工率 P に対する公式が導かれる。

$$P=\frac{GI^2\omega^6}{15c^5} \tag{7.52}$$

7.6　くるくる回転する棒からの輻射

歴史的に最初に考慮されるべき重力輻射の問題はくるくる回転する棒からの輻射(1.2）であった。いまこれを計算してみよう。棒は単位長さあたり質量 σ をもち角速度 ω をもって xy 平面内に回転すると仮定しよう。$t=0$ において棒は x 軸方向に向かって置かれている。そのときふたたび(7.36)および(7.13)を用いて

$$\varphi_{11}=\frac{2G}{c^2r}\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\int_{\text{遅延}}\sigma r^2\cos^2\frac{\omega x^0}{c}dr=-\frac{4GI_m\omega^2}{c^4r}\cos\frac{2\omega}{c}(x^0-r) \tag{7.53}$$

$$\varphi_{22}=\frac{2G}{c^2r}\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\int_{\text{遅延}}\sigma r^2\sin^2\frac{\omega x^0}{c}dr=\frac{4GI_m\omega^2}{c^4r}\cos\frac{2\omega}{c}(x^0-r) \quad (7.54)$$

$$\varphi_{12}=\frac{2G}{c^2r}\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\int_{\text{遅延}}\sigma r^2\sin\left(\frac{\omega x^0}{c}\right)\cos\left(\frac{\omega x^0}{c}\right)dr$$

$$=-\frac{4GI_m}{c^4r}\omega^2\sin\frac{2\omega}{c}(x^0-r) \quad (7.55)$$

(7.53), (7.54) および (7.55) の中で I_m は棒の慣性モーメントである。座標条件 (7.11) は φ_{00}, φ_{01}, および φ_{02} を計算するために用いられ，輻射工率は (7.45) を用いて計算される；その結果は

$$P=\frac{32GI_m{}^2\omega^6}{5c^5} \quad (7.56)$$

7.7　弱い場の解への一層の注意

もし重力の効果が光の速さで伝播することだけを仮定し，加速された電荷からの輻射を計算するために用いられてきた種類の発見的な議論† に従うなら (7.56) と (7.52) が得られることに注目するのは興味がある。

表式 (7.36) は最低次の多重輻射が四重極輻射であることを述べている。このことは，孤立した振動系に対して双極モーメントは線形運動量の保存の結果により0になるという事実からも結論される。たとえばバネによって大きな質量に結合した小さい質量 (7.1図) があり，その系が振動しているとしよう。も

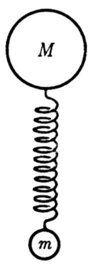


図　7.1

† たとえば Richtmyer and Kennard, Introduction to Modern Physics, McGraw-Hill, New York, Fourth Edition, 1947 p.62 を見よ。

し x_m と x_M がそれぞれ小さい質量と大きい質量の変位であるなら運動量保存から

$$m\dot{x}_m+M\dot{x}_M=0 \tag{7.57}$$

および

$$m\ddot{x}_m+M\ddot{x}_M=0 \tag{7.58}$$

を得る。

(7.58) の左辺は (加速された質量の) 輻射への二重極の寄与を与えることが期待されるかもしれないが，それは (7.57) の結果によって0となるのである。

Bonnor (17) は第2近似で四重極振動子の質量エネルギーの喪失を計算したが，それは第1近似で (7.52) によって与えられる輻射エネルギーに等しいことを見いだした。

7.8　正確な円柱状の波動解

Einstein と Rosen (4)(5) は一般相対論の方程式のある厳密な円柱状の波動解を得た。それらの計量は

$$-ds^2=c^{2\gamma-2\psi}(d\rho^2-c^2dt^2)+\rho^2e^{-2\psi}d\varphi^2+e^{2\psi}dz^2 \tag{7.59}$$

である。関数 γ と ψ は ρ と t のみに依存する。(7.59) によって定義された計量は自由空間の方程式

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{7.60}$$

の中で ψ および γ によって満足されねばならない次の (正確な) 方程式に導くために使うことができる。

$$\psi_{,\rho,\rho}+\frac{1}{\rho}\psi_{,\rho}-c^{-2}\psi_{,t,t}=0 \tag{7.61}$$

$$\gamma_{,\rho}=\rho[(\psi_{,\rho})^2+(1/c^2)(\psi_{,t})^2] \tag{7.62}$$

$$\gamma_{,t}=2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t}/c \tag{7.63}$$

(7.61) は線形の方程式，円柱座標の波動方程式である。外向きに動く波を表す (7.61) の解は

$$\psi=A[J_0(\omega\rho/c)\cos\omega t+N_0(\omega\rho/c)\sin\omega t] \tag{7.64}$$

である。(7.62) と (7.63) を利用すると

$$\begin{aligned}\gamma=&(A^2\omega\rho/2c)\{J_0(\omega\rho/c)J_0'(\omega\rho/c)+N_0(\omega\rho/c)N_0'(\omega\rho/c)\\&+(\omega\rho/c)[(J_0(\omega\rho/c))^2+(J_0'(\omega\rho/c))^2+N_0(\omega\rho/c))^2\\&\quad+(N_0'(\omega\rho/c))^2]\\&+[J_0(\omega\rho/c)J_0'(\omega\rho/c)-N_0(\omega\rho/c)N_0'(\omega\rho/c)]\cos 2\omega t\\&+[J_0(\omega\rho/c)N_0'(\omega\rho/c)+N_0(\omega\rho/c)J_0'(\omega\rho/c)]\sin 2\omega t\}\\&\quad-(2/\pi)A^2\omega t\end{aligned} \tag{7.65}$$

ダッシュは $(\omega\rho/c)$ に関しての微分を意味する。(7.65) の最後の項は時間に比例して増加し，最初はこれがエネルギーの連続輻射による計量への蓄積的な効果を表すものと考えられた。Rosen (7) は，もしエネルギーが原点の近くにある円柱状の系によって輻射されるならば，エネルギーの損失が (7.64) によって与えられる関数 ψ が時間について周期的であり続けることを不可能にするだろうという見地に立ってこの解釈に反対する議論を行った。関数 N_0 の出現は (7.65) に軸上で特異点をもたせる。Marder は自由空間の解 (7.65) を質量を含む原点近くの領域の解に，物理的に受け入れられるような仕方でつなぐことは，密度の符号が究極的に変わるだろうから可能でないことを注意した。彼は (7.65)に関連した困難を，場が無限に長い時間作りっぱなしになっているという事実によるものと考えている。

もっと興味の深い場合は輻射パルスの場合である。(7.61) が線形であることからフーリエ積分を用いてこれを取り扱うことが可能になる。次の議論は Weber および Wheeler (16) の論文のまとめである。ψ のフーリエ変形に対して

$$\psi(\omega)=2Be^{-(a\omega/c)}J_0(\omega\rho/c)/c \tag{7.66}$$

をえらぶ。これは $\psi(t)$ および $\gamma(t)$ を作るために要求される積分は容易に遂行されうるという利点をもつ。

$$\begin{aligned}\psi&=2B\int_0^\infty e^{-(a\omega/c)}J_0(\omega\rho/c)\cos\omega t\,d\omega/c\\&=B[([a-ict]^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}+([a+ict]^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}]\end{aligned} \tag{7.67}$$

(7.62) および (7.63) の積分はそのとき次式で与えられる。

$$\gamma=\frac{1}{2}B^2\{a^{-2}-\rho^2[(a-ict)^2+\rho^2]^{-2}-\rho^2[(a+ict)^2+\rho^2]^{-2}$$
$$-a^{-2}(c^2t^2+a^2-\rho^2)[c^4t^4+2c^2t^2(a^2-\rho^2)+(a^2+\rho^2)^2]^{-\frac{1}{2}}\} \tag{7.68}$$

(7.67) を調べてみると t の負の値に対して“パルス”は軸に向かって急に集まることを示している。それは t の正の値に対してふたたび外へはねかえって飛び出す。それはアインシュタインの場の方程式の“時間の向きについて対称”な解である。

“エネルギー密度”を計算するために表式 (6.32) を用いる。

$$\sqrt{-g}\tau_\mu{}^\nu=\left[-2g^{\nu\lambda}\frac{\partial(\mathscr{L}_G\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\lambda}{}_{,\rho}}\right]_{,\rho} \tag{7.69}$$

(7.59) および (6.39) を用いる直接の計算は

$$\frac{\partial(\mathscr{L}_G\sqrt{-g})}{\partial g^{00}{}_{,0}}=0$$
$$\frac{\partial\mathscr{L}_G\sqrt{-g}}{\partial g^{00}{}_{,1}}=-\frac{1}{2}g^{11}g_{00}\left(g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{c^4}{16\pi G}\right)\sqrt{-g} \tag{7.70}$$

に導く。これらと共に (7.69) は，$\tau_0{}^0\sqrt{-g}$ に対して

$$\tau_0{}^0\sqrt{-g}=\frac{c^4}{8\pi G}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-1+2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)=0 \tag{7.71}$$

となる。この計算 (7.71) は物質が存在してもしなくても (7.59) の形をした任意の計量に対して成立する。いたるところで 0 となるエネルギー密度 (7.71) は $\tau_\mu{}^\nu$ に対するランダウ・リフシッツの表式(8) (6.58) および (6.60) を用いて確認される。メラーのテンソル (6.62) および (6.65) を用いると幾分類似した結果が得られる。直接の計算は計量 (7.59) に対して

$$\Lambda_0{}^0\sqrt{-g}=\frac{c^4}{4\pi G}\left\{\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\rho^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{c\partial t}\right)^2\right]\right\}_{,\rho} \tag{7.72}$$

を与える。この表式は恒等的に 0 になるわけではないが，単位長さあたりのエネルギーに対する積分値

$$\int\Lambda_0{}^0\sqrt{-g}\,d\rho\, d\varphi=\frac{c^4}{2G}\left|\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\rho^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{c\partial t}\right)^2\right]\right|_0^\infty \tag{7.73}$$

は (7.67) および (7.68) に対して 0 となる。(7.72) はパルス波の解に対して

ある場所で正，他の場所で負である。パルス (7.67) および (7.68)が $t=0$ において大きい ρ に対して漸近的に平坦であるが“ユークリッド的”ではないある空間を表していることに注目する。なぜなら (7.68) に従えば大きい距離で $\gamma \to B^2a^{-2}$ であるから。計量は $t=0$ に対して大きい ρ で“円錐状”である。

Rosen は最近(20)“直交”座標系において円柱状の解に対する $\tau_0{}^0$ および $\tau_0{}^1$ を計算し，それらが有限で合理的なものであることを見いだした。彼の結果はエネルギー密度に対する Mφller によって与えられたものと矛盾はしない。なぜかというと円柱座標から Rosen の直交座標系に移行する際には時間を含む変換がおそらく要求されるから。Mφller の値は空間的な座標変換のもとでだけ不変である。円柱座標系では“エネルギー”が常に正定値であるという保証はない。もし負の値が許されるなら，そのときは $\tau_0{}^0$ が 0 になることは波からのエネルギーの吸収は波動のエネルギーを負にすることを単に意味するのかもしれない。エネルギーに対する下限は安定性を保証するだろう。

7.9 円柱状重力波と粒子の相互作用

計量 (7.59) に対するリーマンテンソルの成分の計算によれば，成分は円柱状の波に対してすべて 0 になることはなく，そこで波動は実でなければならないことが示される。この節では円柱状のパルスと相互作用を行っている始め静止していた粒子の運動を解析することによって，円柱状の波が実際にエネルギーを運ぶことを示す。ρ に対する測地方程式を書き，ψ を 1 次の量と考え，γ を 2 次の量とし，逐次にそれを積分する。

$$\rho=\rho_{(0)}+\rho_{(1)}+\rho_{(2)}+\cdots \tag{7.74}$$

としよう。計量 (7.59) から

$$c\frac{dt}{ds}=1+\psi-\gamma+\psi^2/2+\cdots+\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2\Big/2+\cdots \tag{7.75}$$

これらの関係式は 1 次の方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho_{(1)}}{dt^2}&=c^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\\&=-Bc^2\rho_{(0)}\{[(a-ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]^{-\frac{3}{2}}+[(a+ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]^{-\frac{3}{2}}\}\end{aligned} \tag{7.76}$$

および2次の方程式

$$\frac{d^2\rho_{(2)}}{c^2dt^2}=\frac{d\rho_{(1)}}{c^2dt}\left(\frac{\partial\psi}{dt}\right)_{\rho_{(0)}}-\left(\frac{d\gamma}{d\rho}\right)_{\rho_{(0)}}+\rho_{(1)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right)_{\rho_{(0)}} \tag{7.77}$$

に導く。これらの方程式を得るときに

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)_{\rho_{(0)}}+\rho_{(1)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right)_{\rho_{(0)}}$$

を利用した。(7.76) の積分は，$t=-\infty$ で $d\rho/dt=0$ という境界条件に対して

$$\frac{d\rho_{(1)}}{dt}=-\frac{icB}{\rho_{(0)}}\left[\frac{a-ict}{[(a-ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{a+ict}{[(a+ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{7.78}$$

を与える。$t=-\infty$ から $t=0$ までの ρ の変化は，大きい ρ に対して

$$\varDelta\rho=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)dt'dt=\frac{2B}{\rho_{(0)}}[(\rho_{(0)}{}^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-a]\to 2B \tag{7.79}$$

と書いてよい。$t=0$ における，大きい ρ に対する軸からの距離は

$$\int g_{11}{}^{\frac{1}{2}}d\rho=\int_0^{\rho_0+\varDelta\rho}e^{\gamma-\psi}d\rho\approx\rho_0+2B-2B\ln(2\rho_{(0)}/a) \tag{7.80}$$

である。(7.78)，(7.79) および (7.80) の結果は，1次の次数で最初に止まっていた粒子は波が到達するときに動き始めることを示す；波が最も内側に動いた瞬間における座標 ρ の変化は $+2B$ であるが，その瞬間における間隔の変化は $2B-2B\ln(2\rho_{(0)}/a)$ である。波動がふたたび外へはね返ったときこれらの段階は可逆的にこの近似でふたたびトレースされ，そこで $t=+\infty$ において粒子はそれが出発した場所に戻り静止して終わる。けれどもその粒子が第2の遠方の粒子と非可逆性† を与える機構によって結合すると考えることもできる。相対的運動はそのとき第1近似においてさえ波動からのエネルギーの吸収に導くだろう。

第2近似を考えるためには (7.77) を積分する必要がある。示された演算を

† 次の章において，測地線に沿って進む局所ローレンツ座標系においては，エネルギーは常に R_{i0j0} のフーリエ変形が0にならないような系から吸収されてよいことを示そう。

遂行するために22個の積分を必要とする。 $t\to+\infty$ における速度だけを計算する。そのときは線積分の議論によって，3個を除くすべての積分は0になることが容易に示され，結果は

$$\left(\frac{d\rho_{(2)}}{dt}\right)_{t\to+\infty}$$

$$=-\frac{4B^2}{\rho_{(0)}}(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c^2dt}{\{[(a+ict)^2+\rho_{(0)}{}^2][(a-ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{12a^2B^2}{\rho_{(0)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c^4t^2dt}{\{[(a+ict)^2+\rho_{(0)}{}^2][(a-ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+6\rho_{(0)}B^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c^2[(a-ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]^{\frac{1}{2}}dt}{[(a+ict)^2+\rho_{(0)}{}^2]^{\frac{5}{2}}} \tag{7.81}$$

となる。これらの積分は

$$F=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{[1-z\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}};\qquad z=\frac{\rho_{(0)}{}^2}{a^2+\rho_{(0)}{}^2} \tag{7.82}$$

を用いて

$$\left(\frac{d\rho}{cdt}\right)_{t\to+\infty}$$

$$=B^2F\left[\frac{-4}{\rho_{(0)}(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{5\rho_{(0)}}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\rho_{(0)}(5a^2+\rho_{(0)}{}^2)}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

$$+B^2\frac{dF}{dz}\left[\frac{4(a^2-\rho_{(0)}{}^2)}{\rho_{(0)}(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{12a^2}{\rho_{(0)}(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{8(a^2-\rho_{(0)}{}^2)\rho_{(0)}}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{5}{2}}}\right.$$

$$-\frac{9\rho_{(0)}(5a^4+6a^2\rho_{(0)}{}^2+\rho_{(0)}{}^4)}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{7}{2}}}-\frac{12\rho_{(0)}(5a^2+\rho_{(0)}{}^2)(a^2-\rho^2{}_{(0)})}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\left.-3\rho_{(0)}(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{-\frac{3}{2}}\right]+B^2\frac{d^2F}{dz^2}\left[\frac{\rho_{(0)}(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^3(a^2-\rho_{(0)}{}^2)^2}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{13}{2}}}\right.$$

$$+\frac{3\rho_{(0)}(5a^4+6a^2\rho_{(0)}{}^2+\rho_{(0)}{}^4)(a^2-\rho_{(0)}{}^2)}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\left.+\frac{3\rho(5a^2+\rho_{(0)}{}^2)(a^2-\rho_{(0)}{}^2)^2}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{9}{2}}}+\frac{\rho_{(0)}(a^2-\rho_{(0)}{}^2)}{(a^2+\rho_{(0)}{}^2)^{\frac{5}{2}}}\right] \tag{7.83}$$

この長い表式は $\rho_{(0)}$ が小さい極限および大きい極限 $t\to\infty$ に対して

$$\frac{d\rho_{(2)}}{dt}\to-\frac{2\pi B^2 c\rho_{(0)}}{a^3},\qquad \left(\frac{\rho_0}{a}\ll 1\right) \tag{7.84}$$

$$\frac{d\rho_{(2)}}{dt}\to-\frac{2B^2 c}{c^2},\qquad \left(\frac{a}{\rho_0}\ll 1\right) \tag{7.85}$$

となる。

(7.84) および (7.85) は波動が去ってしまい内部空間がふたたび平担となった後に，粒子は軸に相対的な残留速度† を持ったままに残されることを示している。軸は一つのテスト用粒子をそこに置くこともできるからこの問題において現実の意味をもっている；それは(7.79) に従えばその後どんな時刻にも動かないであろう。そこで動径座標 ρ のところにある粒子を観測することは粒子の対の相対運動を観測することになる。

これらと類似した結論は独立に L. Marder (18) によって得られている。彼はパルスの解を輻射器であるところの質量シリンダーの内部に拡張した。パルスの放出の後でシリンダーの質量が減少することが見いだされた。

7.10 厳密な平面波の解††

† この速さは無限大の時間にわたって無限大の変位を生ずる。これはわれわれの B/a のべき級数展開の成立には影響しない。

†† これらの波は平面ではない。なぜなら x 方向への伝播に対して平担さからのずれが y と z に依存するから。Bondi はそれが平面の電磁波と同じだけの対称性をもつから，それらを平面と名づけている。これらの計量は 5 個のパラメターをもつ運動の群を許容する。

これらの解の啓蒙的な議論が Bonnor (24) によって与えれた。それは以下のようにまとめられる。計量

$$-ds^2=Ad\xi^2+Bdy^2+Cdz^2-2bdydz-Dd\eta^2$$

を考えよう。ここで A，B，C，b および D は $\xi-\eta$ のみの関数である。

$A=D$ となるような座標を選ぼう。そのとき $\xi\to\tau-x$，$\eta\to\tau+x$ として

$$-ds^2=-dxd\tau+Bdy^2+Cdz^2-2bdydz$$

を得る。ここに B，C および b は x のみの関数である。

この計量に対して真空の場の方程式は

$$R_{11}=\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}-\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial x}=0$$

↗

平面の重力波はたくさんの著者によって考察された。Taub (6) と McVittie (11)は偏りのない平面波は存在しないことを示した。Robinson と，後に Bondi (13)(14)は場の方程式が二つの平坦な時空領域の間の有限なひろがりを持つ“平面の”波動帯を許すことを示すこができた。彼らはもともと Rosen によって与えられた計量から出発する；

$$ds^2=e^{2\Omega}(d\tau^2-d\xi^2)-u^2\{e^{2\beta}d\eta^2+e^{-2\beta}d\xi^2\} \tag{7.86}$$

ただし $u=\tau-\xi$。β および Ω は u だけの関数である：$2\Omega_{,u}=u(\beta_{,u})^2$。この計量は真空の場の方程式 $R_{\mu\nu}=0$ を満足する。それは一般に曲がった空間を表現している。もし関係

$$u\beta_{,u,u}+2\beta_{,u}=u^2(\beta_{,u})^3 \tag{7.87}$$

が満たされるなら，$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ のすべての成分は 0 となり，空間は平坦である。座標変換，$u>0$ に対して

$$u=\tau-\xi=ct-x; \qquad e^{2\Omega}(\tau+\xi)=ct+x-u^{-1}(y^2+z^2),$$
$$\eta u e^{\beta}=y, \qquad u\zeta e^{-\beta}=z$$

を遂行することによって計量 (7.86) は

↘ および $x=BC-b^2$ である。他の真空場の方程式は B，C および b へのそれ以上の制限なしに満足される。そのときわれわれはそれらが満たすところのただ一つの関係式とともに 3 個の未知の関数をもっている。3 個の中の 2 個は任意に選ばれてよい。$b=0$ とおき，$B=p^2$，$C=q^2$ としよう；そのとき R_{11} に対する場の方程式は

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{1}{q}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0$$

となる。この方程式の特解として $p=\sin nx$，$q=\sinh nx$ をとろう。そこで m は実の定数である。この解は超曲面，$x=m\pi/n$，$x=\pm\infty$（m は整数），の上で特異性をもつようにみえる。

これからの特異点は次の変換を遂行することによって除かれうる。

$$\left.\begin{aligned}
x^0&=\tau+ny^2\sin nx\cos nx+nz^2\sinh nx\cosh nx\\
x^1&=x\\
x^2&=y\sin nx\\
x^3&=z\sinh nx
\end{aligned}\right\}$$

そうしてこれが遂行されたときに計量は

$$-ds^2=-dx^0dx^1+(dx^2)^2+(dx^3)^2-n^2(dx^1)^2((x^2)^2-(x^3)^2)$$

となる。$x=m\pi/n$ における特異点は消失した。無限遠における特異点も新しい原点を選ぶことによってやはり除去されうる。

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$
$$+2\beta_{,u}[(ydy-zdz)(cdt-dx)-(y^2-z^2)(cdt-dx)^2(ct-x)^{-1}]$$
$$-(\beta_{,u})^2(c^2t^2-x^2)(cdt-dx)^2 \qquad (7.88)$$

となる。u の有限な正の領域を除き $\beta_{,u}=0$ に対して，二つの平担な領域の間の曲がった空間領域が存在する。波の振幅は β によって決定され，それは u の任意の関数である。

第 2 の波動の形は計量

$$ds^2=e^{2\Omega}(d\tau^2-d\xi^2)-(\tau-\xi)^2[(\cosh 2\beta)(d\eta^2+d\zeta^2)$$
$$+\sinh 2\beta\cos 2\theta(d\eta^2-d\zeta^2)-2\sinh 2\beta\sin 2\theta d\eta d\zeta] \qquad (7.89)$$

によって記述される。ここでふたたび Ω，β および θ は $u=\tau-\xi$ に依存し

$$2\Omega_{,u}=(\tau-\xi)[\beta_{,u}{}^2+\theta_{,u}{}^2\sinh^2(2\beta)] \qquad (7.90)$$

Bondi は境界のところで $g_{\mu\nu}$ とその一次微係数の連続性についての Lichnerowicz の条件が満たされうることを注意する。（これらの条件はこの章で後に与えられる。）

7.11　輻射*の問題の初期値定式化

重力波への異なった接近の仕方は，場の方程式が場*の初期値**への要求を設定し，それから未来の進化がどのようであるかを予言するものとして考えられてよいことに注目することである。受け入れられる初期値の研究が可能な波動解(22)(23)に関する知識を与える。

マックスウェル方程式に対する相当する状況はよく知られている。電荷や電流がないときの方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0; \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \qquad (7.91)$$

はたとえば $t=0$ における $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ への条件を構成する。残りの方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}; \qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (7.92)$$

---

*　そういう研究ははじめて Lichnerowicz (10) と Foures-Bruhat (27) により遂行された。

**　この節はD.Brill のドクター論文，Princeton University 1959，の部分的な要約である。

がそのときすべての段階で（7.91）を保つような時間変化を定める。

一般相対論の方程式に対して空間的曲面 $x^0=0$ を選ぶことができる。方程式が2次の時間微係数を含むから，初期値は $g_{\mu\nu}$ とそれらの1次時間微係数であるだろう。縮約されたビアンキ恒等式を利用してアインシュタインテンソルに対して

$$(G_\mu{}^0)_{;0}=-(G_\mu{}^i)_{;i} \tag{7.93}$$

$$(G^{\mu 0})_{;0}=-(G^{\mu i})_{;i} \tag{7.94}$$

を書こう。

2階より高次の時間微係数は（7.93）および（7.94）の右辺には生じないから，$G^{\mu 0}$ および $G_\mu{}^0$ は $g_{\mu\nu}$ の1次より高次の時間微係数を含みえない。応力エネルギーテンソルは $g_{\mu\nu}$ の微係数を含まないだろう。そこで4個の方程式

$$R^{\mu 0}-\frac{1}{2}g^{\mu 0}R=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu 0} \tag{7.95}$$

あるいは

$$R_0{}^\mu-\frac{1}{2}\delta_0{}^\mu R=\frac{8\pi G}{c^4}T_0{}^\mu \tag{7.96}$$

が初期値方程式として取られてよく，そうして6個の方程式

$$R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R=\frac{8\pi G}{c^4}T^{ij} \tag{7.97}$$

あるいは

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \tag{7.98}$$

が時間変化を与える方程式であることが帰結される。

いま，もし集合（7.95）あるいは（7.96）が始めの時刻において満足されるなら，（7.97）あるいは（7.98）を積分して生ずる任意の解は初期値方程式（7.95）あるいは（7.96）を満足し続けるであろうことを示すことができる。

$$X^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R-\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \tag{7.99}$$

としよう。

$T^{\mu\nu}$ の共変発散は0になるので，（7.94）から

$$X^{\mu 0}{}_{;0} = -X^{\mu i}{}_{;i} \tag{7.100}$$

を書くことができる。$\mu=k$ に対して (7.100) は

$$\begin{aligned} X^{k0}{}_{;0} &= X^{k0}{}_{,0} + \Gamma^k{}_{\alpha 0} X^{\alpha 0} + \Gamma^0{}_{\alpha 0} X^{k\alpha} \\ &= -[X^{ki}{}_{,i} + \Gamma^k{}_{\alpha i} X^{\alpha i} + \Gamma^i{}_{\alpha i} X^{\alpha k}] \end{aligned} \tag{7.101}$$

となり，$\mu=0$ に対して (7.100) は

$$\begin{aligned} X^{00}{}_{;0} &= X^{00}{}_{,0} + \Gamma^0{}_{\alpha 0} X^{\alpha 0} + \Gamma^0{}_{\alpha 0} X^{0\alpha} \\ &= -[X^{0i}{}_{,i} + \Gamma^0{}_{\alpha i} X^{\alpha i} + \Gamma^i{}_{\alpha i} X^{\alpha 0}] \end{aligned} \tag{7.102}$$

を与える。

最初の表式 (7.101) を考えよう。$t=0$ において $X^{\mu\nu}$ はいたるところで 0 となるから空間微係数 $X^{ki}{}_{,i}$ も 0 となる。そこで $X^{k0}{}_{,0}$ が最初に 0 となることを結論してよい。いま(7.102) を考えよう； $X^{\mu\nu}$ および X^{0i} はいたるところで $t=0$ となるから $X^{0i}{}_{,i}$ も 0 となる；そこで $X^{00}{}_{,0}$ は始めに 0 となる。いま(7.101) を時間に関して偏微分をとろう。そのとき $X^{k0}{}_{,00}$ は始めに 0 になることが示されうる。もし (7.102) を時間に関して偏微分するなら，始めにいたるところで $X^{0i}{}_{,0}$ が 0 になることは $X^{0i}{}_{,0i}$ が 0 になることを保証し，それは始めの時刻において $X^{00}{}_{,00}$ が 0 であることを保証している。この過程を継続して $X^{\mu 0}$ とそのすべての時間微係数がはじめに 0 になることが明らかになる。$X^{\mu 0}$ のテイラー展開がそのとき $X^{\mu 0}$ はすべての時刻において 0 となることを保証する。

7.12　正エネルギーをもつ時間対称な解

n を $\alpha\beta\gamma\delta\cdots$ の中に 0 が生ずる回数としたとき

$$T_{\alpha\beta\cdots}{}^{\gamma\delta\cdots}(x^0, x^i) = (-1)^n T_{\alpha\beta\cdots}{}^{\gamma\delta\cdots}(-x^0, x^i) \tag{7.103}$$

であるなら，テンソル T は時間対称であるといわれる。

対称性のこの要素を導入すると (7.95) および (7.96) の集合を解く問題が相当に簡単化されることがわかるだろう。時間対称な解は $+x^0$ および $-x^0$ において同じ空間座標微分をもった一対のでき事に対して ds^2 の同じ値を与えるべきである。そこで $g_{i0}=0$；だから問題の中のすべてのテンソルは同じ種類の対称性をもたねばならない。そこで方程式 $R^{0i} - \left(\frac{1}{2}\right) g^{0i} R = 8\pi G T^{0i}/c^4$ は R^{0i},

g^{0i} および T^{0i} が 0 となるとき自動的に満足されることが結論される。初期値の関係式は一つの方程式

$$R_0{}^0-\frac{1}{2}R=\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)T_0{}^0 \tag{7.104}$$

に帰着する。

(7.104) は次の形に書かれてよい。

$$\begin{aligned}R_0{}^0-\frac{1}{2}(R_0{}^0+R_i{}^i)&=\frac{1}{2}[R_{i0}{}^{i0}-(R_{i0}{}^{i0}+R_{ik}{}^{ik})]\\&=-\frac{1}{2}R_{ik}{}^{ik}=\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)T_0{}^0\end{aligned} \tag{7.105}$$

座標の時間直交系において $R_{ik}{}^{ik}$ は 3 次元計量から計算された曲率スカラー ${}^{(3)}R$ に帰着する。これは $R_{ik}{}^{ik}=R_{ik\alpha\beta}g^{i\alpha}g^{k\beta}$ であるからである。i と k は空間の指標であり $g^{i0}=0$ だから，空間指標 g_{ij} の空間微係数の和だけが $R_{ik}{}^{ik}$ の中に入ってくることが帰結される。初期値の方程式は

$${}^{(3)}R+\left(\frac{16\pi G}{c^4}\right)T_0{}^0=0 \tag{7.106}$$

となる。真空中では，“純粋な”重力波に対して，(7.106) は

$${}^{(3)}R=0 \tag{7.107}$$

である。

(7.107) の解を考えよう。これらの許された初期値は完全な解の本質的な特徴を示すべきである。Brill は解についての知識を次のような方法で得る。${}^{(3)}R'=0$ を満足するところの要求された計量が $g'_{\mu\nu}$ であるとしよう。ds'^2 をもう一つの計量 ds^2 から

$$ds'^2=e^{2P}ds^2 \tag{7.108}$$

に従って得られるとしよう。ダッシをつけない $g_{\mu\nu}$ は基底計量と呼ばれる。P は座標の関数である。変換 (7.108) はこれまで用いられた座標変換とは違って間隔が実際に変化するから，新しい種類の演算である。ある特定の点においてすべての微分間隔が因数 e^P だけ変化する。小さな三角形あるいは任意の小さな図形の形は変化しないだろうということが出てくる。変換 (7.108) はそこでコンフォーマルと呼ばれる。(基底計量) R によって R' の値は

$$R'=e^{-2P}[R+(n-1)(2\nabla^2P+(n-2)(\nabla P)^2)] \tag{7.109}$$

と書かれてよい(25)ことが示されうる。

(7.109) において n は空間の次元数である。また

$$\nabla^2P=g^{ij}P_{;i;j};\qquad (\nabla P)^2=g^{ij}P_{,i}P_{,j}$$

われわれの場合には 3 次元空間，そこで $n=3$ に対する R' に関心をもっている。代入

$$\Psi=e^{((n-2)/2)P} \tag{7.110}$$

をするのが便利である。(7.109) および (7.108) は $R'=0$ に対して

$$ds'^2=\Psi^4ds^2;\qquad \nabla^2\Psi+\frac{1}{8}{}^{(3)}R\Psi=0 \tag{7.111}$$

となる。

Brill は (7.111) の注意深い研究によって，よく振舞いかついたるところで 0 とはならない Ψ について，漸近的ふるまい

$$ds'^2\to\left(1+\frac{2Gm}{c^2r}\right)(dr^2+r^2d\Omega^2)+g_{00}c^2dt^2 \tag{7.112}$$

をもつ計量に相当して，(7.111) の解は存在するという結論に導かれた†。

関数 Ψ は，$i=1,2,3,\cdots$ として，級数 $A+B_ir^{-i}$ の形に漸近的に展開されてよい。(7.111) の研究は，R の展開の最初の 0 でない項は r^{-4} のようになることを示す。(7.112) は，r の負のべきへの展開が適当であり，したがって (7.112)が適用される，任意の波の質量エネルギーを指定するためのあいまいさのない方法を提供する。Brill は，軸対称をもつ場†† に対して "シュヴァルツシルト" の質量が正定符号の量であることを見いだしている。これを示すために，(7.111) の第 2 の方程式を Ψ で割り，積分して次式を得る。

$$\int\frac{\nabla^2\psi}{\psi}\sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x=\int_{\text{曲面}}\frac{\nabla\psi}{\psi}dS+\int_v\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right)^2\sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x$$

---

† (7.111) の第 2 の方程式は曲がった空間のシュレーディンガー方程式の形をもっている。それに対してそういう解があることが知られている。

†† 荒木(23)は，弱い場の近似で，軸対称の仮定なしにエネルギーが正定符号であることを示した。

$$= -\frac{1}{8}\int {}^{(3)}R\sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x \tag{7.113}$$

$$\psi^4 \to 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} \qquad \text{および} \qquad \psi \to 1 + \frac{Gm}{2c^2 r}$$

だから

$$\int \frac{\nabla\psi}{\psi} dS \to -2\pi Gm/c^2 \tag{7.114}$$

(7.113) および (7.114) から

$$\frac{2\pi Gm}{c^2} = \int \left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right)^2 \sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x + \frac{1}{8}\int {}^{(3)}R\sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x \tag{7.115}$$

を得る。

軸対称な場合には計量は

$$ds'^2 = \psi^4[e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] = \psi^4 ds^2 \tag{7.116}$$

と書かれてよい。

ここで q は漸近的に少なくとも $1/r^2$ と同程度に速く落ちる; $r^2 = \rho^2 + z^2$。q, $\psi_{,\rho}$ および $q_{,\rho}$ は z 軸上で 0 となる。

((7.116) のかっこの中の) 基本計量に対して積分 $\int {}^{(3)}R\sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x$ は直接に評価されて, 原点に中心をもつ大きな球の半径が無限遠に近づくとき 0 に接近する。そのとき質量 (7.115) は

$$m = \frac{c^2}{2\pi G}\int \left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right)^2 \sqrt{{}^{(3)}g}\,d^3x \tag{7.117}$$

と書かれてよいことが結論される。

Ψ はどこにも零点を持たないから, (7.117) によって与えられる"シュヴァルツシルト的"な質量は, 負の t に対し内側に動き, 正の t に対して外にはね返るところの, 軸対称をもつ局所化された乱れに対してよく定義され, また正定符号の量である。保存則が時間対称の瞬間の前後における m の不変性を保証する。さらに (7.117) と (7.112) から質量は空間が平担であるときのみ 0 となることは明らかである。

7.13 多様体の微分可能性と連続性への条件

比較的最近まで全時空連続体は一つの特異性のない座標系によっておおわれることを要求するのが慣習的であった。これは不必要に制限が強いことがわかってきた。1個以上の座標系が，それらが重なり合う領域においてある条件が満足されうるものとすれば，用いられてよい。一つの特別な座標系が用いられている領域はときどき座標パッチと呼ばれる。

Lichnerowicz (10)は重力場が $T_{\mu\nu}=0$ の場合に一義的な解をもつことを保証するために満たされねばならない条件を注意深く調べた。彼は二つの座標パッチの交わる部分においてその座標系の一つの中の一点の局所座標は他の系の座標に関して4階微分可能で，0でないヤコービアンを持つことを要求する。1次および2次の偏微係数は連続でなければならない；第3および第4の偏微係数は少なくとも断片ごとに連続でなければならない。計量テンソルは連続でなければならず，連続な1次偏微係数をもつことが要求される；第2，第3の偏微係数は少なくとも断片ごとに連続でなければならない。これらの計量テンソルに対する条件はいたるところで要求される。

7.14 重力輻射の6次元の取り扱い

Pirani (12) は重力輻射について興味のある議論を与えた。これは Petrov (9) の仕事に基づき電磁輻射の取り扱いにおけるよく知られたアイディアの一般化である。真空の場合に対して

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{7.118}$$

最初に波面を横切ってのリーマンテンソルの不連続によって特徴づけられた重力波を考えよう。計量テンソルとその偏微係数への Lichnerowicz の連続条件が一義性を保証する。 $g_{\mu\nu}$ がその点でローレンツ計量であり，クリストッフェル記号が0となり，そこにある波面の不連続は x^1 方向に動いているようなある座標系内に一つの与えられた点があると考えよう。新しい座標 ξ と ζ が

$$\xi=(x^0-x^1)/\sqrt{2} \tag{7.119}$$

$$\zeta=(x^0+x^1)/\sqrt{2} \tag{7.120}$$

によって定義されているものとしよう。その点における線要素は

$$ds^2=2d\xi d\zeta-(dx^2)^2-(dx^3)^2 \tag{7.121}$$

となる。

不連続面は $d\xi=0$ である。そのとき $g_{\mu\nu}$ とその1次微係数が連続でなければならないので，そこで $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial\xi\partial\zeta$ もまた連続でなければならないということが結論される。けれども

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial\xi^2} \tag{7.122}$$

は必ずしも連続ではないだろう。7.2節の方法で共変リーマンテンソル $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ に対する表式を調べると，この特別な座標系においてリーマンテンソルの不連続は $\partial^2 g_{22}/\partial\xi^2$，$\partial^2 g_{33}/\partial\xi^2$ および $\partial^2 g_{23}/\partial\xi^2$ のみを用いて書くことができることが示される。二つの変数，σ と φ

$$\sigma=\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial\xi^2}=-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial\xi^2}; \qquad \varphi=\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial\xi^2} \tag{7.123}$$

だけがそれを記述するために必要とされる。φ の項は2-3面内に軸を適当に選ぶことにより0にすることができる。

6次元の定式化はリーマンテンソルにおける不連続の分類や他の目的のために便利であることがわかる。6次元空間は $\delta_{AB}=(1,1,1,-1,-1,-1)$ によっ与えられるその点での擬ユークリッド計量をもつように座標がふたたび選ばれてる。ある点での与えられたテンソルの物理的な成分は局所ローレンツ系における観測者により測られるものであると定義される。もし $H_{\alpha\beta}$ が反対称テンソルの物理的成分であるなら，相当する6個のベクトルは次の規則に従って添字をラベルし直して得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha\beta & 23 & 31 & 12 & 10 & 20 & 30 \\ A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \tag{7.124}$$

リーマンテンソル $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の物理的成分は，上の処方に従って，$\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ を対に取る対称6元テンソル R_{AB} に関係づけられる。リーマンテンソルの不連続はそのとき

$$\varDelta R_{AB}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & -\varphi & 0 & -\varphi & \sigma \\ 0 & -\varphi & \sigma & 0 & \sigma & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi & \sigma & 0 & \sigma & \varphi \\ 0 & \sigma & \varphi & 0 & \varphi & -\sigma \end{vmatrix} \qquad (7.125)$$

と書かれてよい。

この結果は Lichnerowicz の条件から出てきた。(7.125) を 7.2 節と比べると，期待されること，すなわちもし x^1 方向に進む平面の上の不連続である波を持つなら，$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の不連続の 0 でない成分はちょうど (7.27) のそれに等しいことが示される。

電気力学におけるエネルギーの流れのもつある様相を，重力場の場合にそれらを拡張する目的でいま復習してみよう。ローレンツ系で静止している観測者はポインティングベクトル T_{0i} を持つ。ただし $T_{\mu\nu}$ は電磁気的応力テンソルである。ポインティングに似たベクトルが P_ρ で与えられるとしよう。そのとき 4 元速度を U_σ をもつ観測者に対して成立する P_ρ に対する共変的な表式は

$$P_\rho=(\delta_\rho{}^\mu-U_\rho U^\mu)T_{\mu\nu}U^\nu \qquad (7.126)$$

の形に書くことができる。

波の速度で動く観測者はエネルギーの流れを観測しない。そこでそれらに対して (7.126) は 0 となる。これは

$$T_{\rho\nu}U^\nu=(T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)U_\rho \qquad (7.127)$$

に導く。(7.127) はエネルギーの流れを測らない観測者が，電磁的応力テンソル $T_{\rho\nu}$ の固有ベクトルであるところの，速度 U^ν をもつことを表している。もし電磁場が輻射場であるなら場のテンソルは関係式 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=0$ および $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}=0$ を満たす。そういう場はゼロ場と呼ばれる。電磁的応力テンソルの研究は，もし場がゼロ場であるなら，$T_{\mu\nu}$ は固有値 0 に相当するゼロ固有ベクトル ξ^ρ をもつことを示す。電気力学において輻射場はしたがって，その相当する応力エネルギーテンソルが 0 の固有値をもつような場である。すべての

4元速度ベクトルは単位ベクトルだから，ポインティングベクトルは変換して消してしまうことはできないことが帰結される。

重力場に対する幾分類似したアイディアを考察するために，リーマンテンソルの固有対ベクトル $P_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}P^{\rho\sigma}=\lambda P_{\mu\nu}$$
$$R_{AB}P^{B}=\lambda P_{A} \tag{7.128}$$

によって定義される。

$P_{\mu\nu}$ は反対称であり，$a_{\mu}b_{\nu}-a_{\nu}b_{\mu}$ と書かれる。単位ベクトル a_{μ} と b_{μ} は2次元空間を定義する。第1のものに完全に直交するところの第2の2元空間もまた $P_{\mu\nu}$ によって定義される。完全に直交するという術語は，第1の2元空間にあるすべてのベクトルは第2の2元空間のすべてのベクトルに直交していることを意味する。異なった固有双ベクトルと関連した2元空間の対が，たがいに交叉して各交点において交わる曲線に接する4元ベクトルを定義するだろう。これらの4元ベクトルはリーマンの主ベクトルと呼ばれる。もしリーマンの主ベクトルがゼロベクトルなら，重力場は Pirani によって輻射場であるといわれる。

Petrov(9) は，計量が与えられた点でローレンツ形をもつところの適当な配置の座標系によって，リーマンテンソルは次の種類の中の一つである正準形に帰着されうることを示した。

第I型

$$R_{AB}=\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & -\alpha_3 \end{vmatrix};\quad \sum_{k=1}^{k=3}\alpha_k=0,\quad \sum_{k=1}^{k=3}\beta_k=0 \tag{7.129}$$

第Ⅱ型

$$R_{AB}=\begin{vmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\sigma & 0 & 0 & \beta & \sigma \\ 0 & 0 & \alpha+\sigma & 0 & \sigma & \beta \\ -2\beta & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \sigma & 0 & \sigma-\alpha & 0 \\ 0 & \sigma & \beta & 0 & 0 & -\alpha-\sigma \end{vmatrix} \tag{7.130}$$

第Ⅲ型

$$R_{AB}=\begin{vmatrix} 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{7.131}$$

αとβはリーマンテンソルのスカラー不変量である。σの値は10次元平面†にある軸の配置に依存する。

これらの型を調べると，第Ⅰ型は1個が時間的，3個が空間的な主ベクトルをもつことがわかる；第Ⅱ型は1個のゼロ主ベクトルと2個の空間的なベクトルをもつ。第Ⅲ型はただ1個の主ベクトルだけをもちそれは0である。したがって Pirani の判定条件は，もしリーマンテンソルが第Ⅱ（ゼロ）型あるいはⅢ型なら重力輻射が存在し，第Ⅰ型なら存在しないということである。

もし計量がシュヴァルツシルトの値をもつところの空間の各点で座標軸に平行な軸をもつローレンツ系を導入するなら，リーマンテンソルは

$$-\frac{1}{2}\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=GM/c^2r^3; \qquad \beta_k=0$$

をもつ上の第Ⅰ型であることがわかる。アインシュタイン－ローゼンの計量に

† 3行3列の行列もまた明白な対称性の結果によって用いられうる。もし上左の3行3列はM，上右の3行3列はNと呼ばれるなら，行列$M+iN$が本質的な特徴を与える。

対して同様の手続きを行うと

$$\sigma=[\psi_{,\rho,\iota}+5\psi_{,\rho}\psi_{,\iota}+\psi_{,\iota}\gamma_{,\rho}-3\psi_{,\rho}\gamma_{,\iota}]/c$$

をもつ第II型に導かれる。

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の成分は，Petrov の分類図式を利用するために，任意の与えられた点における局所ローレンツ系を用いて計算されねばならぬことが強調されねばならない。

一つの点の近傍でローレンツ計量をもち，$g_{\mu\nu}$ の1次微係数は0となり，また $g_{\mu\nu}$ の指定された2次微係数をもつ特別な座標系は“正常の (normal)”座標系である。極において次の条件が満たされる。

$$\begin{aligned} &x^{\mu}=0 \\ &g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu} \\ &\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu,\rho}=0 \qquad (7.132) \\ &g_{\mu\nu,\rho\sigma}=\frac{1}{2}(R_{\rho\mu\nu\sigma}+R_{\rho\nu\mu\sigma}) \end{aligned}$$

Pirani は正準応力エネルギー擬テンソル密度の平均値

$$t_{\mu}{}^{\nu}\sqrt{-g}=\delta_{\mu}{}^{\nu}\mathscr{L}_{G}\sqrt{-g}-g_{\rho\sigma,\mu}\frac{\partial(\mathscr{L}_{G}\sqrt{-g})}{\partial g_{\rho\sigma,\nu}}$$

を (7.132) によって記述される座標系の中のある1点のまわりで計算した。平均は

$$\langle\sqrt{-g}\,t_{\mu}{}^{\nu}\rangle=\underset{\lim r\to 0}{(4\pi r^{4})^{-1}}\int t_{\mu}{}^{\nu}\sqrt{-g}\,d^{2}S \qquad (7.133)$$

によって定義される。これはここで与えられた輻射の定義を支持するためになされる。$t_{\mu}{}^{\nu}$ は $g_{\alpha\beta,\sigma}$ を用いて書くことができ，したがってそれは任意の測地座標系の極において0となる。上に定義された平均は，$g_{\mu\nu}$ の2次微係数が寄与できるから0にならないだろう。不幸にしてこの平均はエネルギー密度の次元を持たない。(7.132) が成り立つ4元速度 U^{ν} をもつ観測者によって，ひき出すことができるエネルギーの測度を与える (8.2節) ところのエネルギーに似た量である。平均は

$$\langle\sqrt{-g}\,t_{\mu}{}^{\nu}\rangle$$

$$=\left(\frac{1}{27}\right)(\delta_\tau{}^\rho\delta_\mu{}^\nu-2\delta_\mu{}^\rho\delta_\tau{}^\nu)(U^\kappa U^\lambda+g^{\kappa\lambda})(R^{\tau\alpha\beta}{}_\kappa+R^{\tau\beta\alpha}{}_\kappa)R_{\rho\alpha\beta\lambda}\left(\frac{-c^4}{16\pi G}\right) \tag{7.134}$$

であると計算される。

第Ⅰ型のリーマンテンソルについては静止している観測者の場合にこれは（κ の上の和）

$$\langle\sqrt{-g}t_\mu{}^\nu\rangle=\left(\frac{1}{27}\right)\Big[2\Big\{\sum_1^3\alpha_\kappa{}^2(\delta_\mu{}^0\delta_0{}^\nu+2\delta_\mu{}^\kappa\delta_\kappa{}^\nu+3\delta_\mu{}^{\kappa+1}\delta_{\kappa+1}{}^\nu+3\delta_\mu{}^{\kappa+2}\delta_{\kappa+2}{}^\nu)\Big\}-9\delta_\mu{}^\nu\sum_1^3\alpha_\kappa{}^2\Big]\left(\frac{-c^4}{16\pi G}\right) \tag{7.135}$$

を与え，そうして第Ⅱ型に対して

$$\langle\sqrt{-g}t_\mu{}^\nu\rangle=\left(\frac{1}{27}\right)[\alpha^2(-42\delta_\mu{}^\nu+16\delta_\mu{}^1\delta_1{}^\nu+22\delta_\mu{}^2\delta_2{}^\nu+22\delta_\mu{}^3\delta_3{}^\nu)+4\alpha\sigma(\delta_\mu{}^2\delta_2{}^\nu-\delta_\mu{}^3\delta_3{}^\nu)+8\sigma^2(\delta_\mu{}^0+\delta_\mu{}^1)(\delta_0{}^\nu-\delta_1{}^\nu)]\left(\frac{-c^4}{16\pi G}\right) \tag{7.136}$$

を与える。

7.15 他のペトロフⅡクラスの波動解

四つ組（tetrad）（しばしば quadruped, tetrapod, Vierbein（四脚）あるいは four nuple などと呼ばれる）は，局所ローレンツ系†を定義するために任意の点で導入されてよい4個の単位ベクトルの集合のことである。ベクトルの3個は空間的でたがいに直交しており，また第4のものが指定する時間方向にも直交している。四つ組ベクトルは通常 $\lambda_{(\alpha)}{}^\mu$ と書かれ，そこで μ はベクトルの添字であり，(α) は特別なものをラベルする。

Peres は $R_{\mu\nu}=0$ の他のクラスの波動解を得た。それは平面波および円柱波

---

† 座標 x'^α をもつ局所ローレンツ座標系への変換は

$$g'^{\alpha\beta}=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}=\lambda_{(\alpha)}{}^\nu\lambda_{(\beta)\nu}=\delta^{\alpha\beta}$$

に対して

$$dx'^\alpha=\lambda_{(\alpha)\mu}dx^\mu$$

と書くことによって得られる。

より少ない対称性をもっている。彼の計量は

$$-ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+2F(x,y,z+\tau)(dz+d\tau)^2-d\tau^2 \qquad (7.137)$$

場の方程式は $R_{zz}=R_{z\tau}=R_{\tau\tau}=F_{,xx}+F_{,yy}=0$ となり，したがって F が調和関数であるなら満足される。規格直交ベクトルの四つ組は $\tan 2a=F_{,xy}/F_{,xx}$ として

$$\begin{aligned}\lambda_{(0)}{}^{\mu}&=(1+F,0,0,-F)\\ \lambda_{(1)}{}^{\mu}&=(0,\cos a,\sin a,0)\\ \lambda_{(2)}{}^{\mu}&=(0,-\sin a,\cos a,0)\\ \lambda_{(3)}{}^{\mu}&=(F,0,0,1-F)\end{aligned} \qquad (7.138)$$

によって導入される。0にならない $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の成分は（参考のための四つ組によって定義された座標系において）μ と ν が3と0に等しいときのみ

$$\sigma=R_{\mu1\nu1}=-R_{\mu2\nu2}=(F_{,xx}{}^2+F_{,xy}{}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.139)$$

そこでこのクラスの計量はペトロフのⅡクラスに属する。

$$F=(x^2-y^2)\sin(z+\tau); \qquad \sigma=2\sin(z+\tau) \qquad (7.140)$$

に対してわれわれは平面波をもつ。波束の解は

$$\begin{aligned}F&=xy(x^2+y^2)^{-2}e^{[b^2-(z+r)^2]^{-2}}, &&(|z+\tau|<b)\\ F&=0, &&(|z+\tau|>b)\end{aligned} \qquad (7.141)$$

である。

いま物理的興味がある $R_{\mu\nu}=0$ のすべての波動解はⅡ型に接近することを示そう。任意の物理的興味のある波動解は局所化された物質分布により生成されるであろうし，したがって大きい距離（宇宙論的な大きい距離ではない）で平面波となるだろう。7.2節の解析がそれを記述することが帰結される。局所的な平面波の定義は $g_{\mu\nu,\alpha i}=g_{\mu\nu,\alpha j}=0$ をもつところのものであることを強調しておこう。ここで i と j は波の伝播方向に垂直な四つ組方向の二つである。表式（7.27）の10個の成分は処方（7.124）にしたがって正準形に配列され

$$R_{AB}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}g_{33,11} & \frac{1}{2}g_{23,11} & 0 & -\frac{1}{2}g_{23,10} & -\frac{1}{2}g_{33,10} \\ 0 & \frac{1}{2}g_{23,11} & -\frac{1}{2}g_{22,11} & 0 & \frac{1}{2}g_{22,10} & \frac{1}{2}g_{23,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}g_{23,10} & \frac{1}{2}g_{22,10} & 0 & -\frac{1}{2}g_{22,00} & -\frac{1}{2}g_{23,00} \\ 0 & -\frac{1}{2}g_{33,10} & \frac{1}{2}g_{23,10} & 0 & -\frac{1}{2}g_{23,00} & -\frac{1}{2}g_{33,00} \end{vmatrix} \tag{7.142}$$

の結果となる。$g_{23,10}$ および $g_{23,00}$ は適当に参考のための四つ組の向きをえらぶことによって消去されうる。(7.142) を調べると $\alpha=\beta=0$ をもつⅡ型であることが示される。そこですべての物理的に興味がある重力波は大きい距離で $\alpha=\beta=0$ をもつペトロフⅡ(ゼロ)型に近づくことが結論される。(7.142) は近似なしに成り立つから，厳密に重力波が局所的に平面であるようなすべての点でリーマンテンソルはペトロフⅡ(ゼロ)型であることを示された(31)。

Robinson と Trautman(30) は，大きい距離でふたたびペトロフⅡ(ゼロ)型に近づくリーマンテンソルをもつ，波動を表すある厳密な球面解を与えた。それらの計量は

$$ds^2=2d\rho d\sigma+(K-2H\rho-2m/\rho)d\sigma^2$$
$$-\rho^2 p^{-2}\{[d\xi+q_{,\eta}d\sigma]^2+[d\eta+q_{,\xi}d\sigma]^2\}$$

である。ここで m は σ だけの関数，p と q は σ, ξ および η の関数で

$$H=p^{-1}p_{,\sigma}+p(p^{-1}q)_{,\xi\eta}-pq(p^{-1})_{,\xi\eta}$$

Kは曲面 $\rho=1$, $\sigma=$定数のガウスの曲率（第3章）である。

$$K=p^2[(\ln p)_{,\xi\xi}+(\ln p)_{,\eta\eta}]$$

この計量に対して $R_{\mu\nu}=0$ は

$$q_{,\xi\xi}+q_{,\eta\eta}=0;\qquad K_{,\xi\xi}+K_{,\eta\eta}=4p^{-2}(m_{,\sigma}-3Hm)$$

に帰着される。リーマンテンソルは

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}=\rho^{-3}D_{\mu\nu\alpha\beta}+\rho^{-2}\text{III}_{\mu\nu\alpha\beta}+\rho^{-1}N_{\mu\nu\alpha\beta}$$

と書くことができる。D, Ⅲ, NはそれぞれⅠ(縮退)型，Ⅲ型，およびⅡ

(ゼロ) 型のテンソルである。それらは定数の σ, ξ, η に対する任意の線の上で共変的に定数である。

解はもし $m\neq 0$ で K が ξ, η と独立であるなら縮退Ⅰ型であり, $m=1$, $p=\cosh \mu\xi, q=0$ に帰着される。μ は実数あるいは純虚数の量である。もし μ が実数で $\neq 0$ ならシュヴァルツシルトの解を生ずる。

もし $(K_{,\xi})^2+(K_{,\eta})^2\neq 0$ で $R_{\mu\nu}=0$ なら，解はゼロでないⅡ型，あるいはⅢ型に相当する。Ⅲ型は $m=0$ のときに生ずる。もし $m=0$ でKが ξ と η に独立であるなら解はゼロあるいは平坦なⅡ型であり，平坦であることに対する条件として

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left[p^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)H\right]=0$$

をもつ。

σ について周期的な解を作ることができる。源の速さ $<c$ に対して，場がゼロにならない任意の波面の上で少なくとも一つの特異点が存在する。

文 献

1. A. Einstein, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* **1916**, 688; **1918**, 154.
2. A. S. Eddington, *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 102**, 268 (1923).
3. M. Fierz and W. Pauli, *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **173**, 211 (1939).
4. A. Einstein and N. Rosen, *J. Franklin Inst.* **223**, 43 (1937).
5. N. Rosen, *Physik Z. Sowjetunion* **12**, 366 (1937).
6. A. H. Taub, *Ann. Math.* **53**, 472 (1951).
7. N. Rosen, *Bull. Research Council Israel* **3**, 328 (1953).
8. L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1951, Chap. 11.
9. A. Z. Petrov, *Sci. Notes Kazan State Univ.* **114**, 55 (1954).
10. A. Lichnerowicz, *Théories Relativistes de la Gravitation et de L'electromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
11. G. C. McVittie, *J. Rational Mech. and Analysis* **4**, 201 (1955).

12. F. A. E. Pirani, *Phys. Rev.* **105**, 1089 (1957).

13. H. Bondi, F. A. E. Pirani, and I. Robinson, *Proc. Roy. Roc. (London)* **A 251**, 519 (1959).

14. H. Bondi, *Nature* **179**, 1072 (1957).

15. N. Rosen and H. Shamir, *Revs. Modern Phys.* **29**, 429 (1957).

16. J. Weber and J. A. Wheeler, *Revs. Modern Phys.* **29**, 3, 509 (1957).

17. W. B. Bonnor, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* Axxx, 994 (1954).

18. L. Marder, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 244**, 524 (1958).

19. J. Boardman and P. G. Bergmann, *Phys. Rev.* **115**, 1318(1959).

20. N. Rosen, *Phys. Rev.* **110**, 1, 291 (1958),

21. D. Brill, thesis, Princeton University, 1959.

22. D. Brill, *Ann. Physics* **7**, 466 (1959).

23. H. Araki, *Ann. Physics* **7**, 456 (1959).

24. W. B. Bonnor, *Ann. inst. Henri Poincaré* **15**, 146 (1957).

25. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1926.

26. A. Peres, *Phys. Rev. Letters* **3**, 571 (1959).

27. Y. Foures-Bruhat, *J. Rat. Mech. Anal.* **5**, 951, (1956),

28. K. L. Stellmacher, *Math. Annalea*, **115**, 136 (1937).

29. K. L. Stellmacher, *Math. Annalen*, **115**, 740 (1938).

30. I. Robinson and A. Trautman, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 431 (1960).

31. J. Weber and D. Zipoy, *Il Nuovo Cimento*, **18**, 191 (1960).

第8章
重力波の検出と生成†

8.1 検　　　　出

たがいに相互作用をもちうる質量系があると考えよう。作用原理

$$\delta I=0 \tag{8.1}$$

から出発する。作用関数 I は

$$I=-mc\int ds+W \tag{8.2}$$

と書いてよい。ここで m は静止質量であり，W はその質量が相互作用を行う他の質量に相対的な質量の運動から生ずる，重力でない力に関連した作用関数の部分である。仮想仕事の原理によって δW に対して

$$\delta W=-\frac{1}{c}\int F_{\mu}\delta x^{\mu}ds \tag{8.3}$$

によって与えられる関数を仮定することが暗示される。(8.3) の中で F_{μ} は4元力として同定される。(8.1) から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式は3.6節の方法を用いて並べかえて

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=\frac{F^{\mu}}{mc^2} \tag{8.4}$$

を得る。

(8.4) は4元速度 $U^{\mu}=dx^{\mu}/ds$ を用いて

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)=\frac{\delta U^{\mu}}{\delta s}=\frac{F^{\mu}}{mc^2} \tag{8.5}$$

として表されうる。記号 $\delta/\delta s$ は s に関しての共変微係数を意味する。

---

† この章の結果は著者の重力研究財団の賞金論文1958年4月および1959年4月の中に発表された。この章は論文 *Phys. Rev.* **117**, 306, (1960) に従う。われわれは *Physical Review* 誌にここに出版を許されたことを感謝する。

本質的には Synge と Schild の方法に従って各質量要素の世界線は v の与えられた値に対応するようなそういうパラメター v を導入する。(8.5) の v に関しての共変微係数をとると

$$\frac{\delta^2 U^\mu}{\delta v \delta s} = \frac{\delta F^\mu / m}{c^2 \delta v} \tag{8.6}$$

が与えられる。直接の計算から

$$\frac{\delta^2 U^\mu}{\delta s \delta v} = \frac{\delta^2 U^\mu}{\delta v \delta s} + R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\beta \frac{\partial x^\gamma}{\partial v}$$

が導かれる。

共変微分に対するこの交換則を用いると (8.6) を次の形に表すことが可能になる。

$$\frac{\delta^2 U^\mu}{\delta v \delta s} = \frac{\delta^2 U^\mu}{\delta s \delta v} - R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\beta \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} = \frac{\delta F^\mu / m}{c^2 \delta v} \tag{8.7}$$

(8.7) の中で $\partial x^\gamma / \partial v$ は世界線に垂直な単位ベクトルであり，4 元速度 U^μ は世界線に接する単位ベクトルである。ベクトル n^γ は

$$n^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} dv \tag{8.8}$$

によって定義され，v の値が dv だけ異なるところの隣接した世界線の上で同じ値の s をもつ点を結ぶ無限小ベクトルである。$\partial x^\gamma / \partial v$ の s に関する共変微係数は

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial v}\right) = \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial s}\right) = \frac{\delta U^\gamma}{\delta v} \tag{8.9}$$

の形に書かれる。(8.6)，(8.7)，(8.8)および (8.9) を用いると次式となる。

$$\frac{\delta^2 n^\mu}{\delta s^2} + R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha n^\beta U^\gamma = \frac{\delta F^\mu / m}{c^2 \delta v} dv \tag{8.10}$$

もし粒子が相互作用を行わないなら (8.10) の右辺はゼロで

$$\frac{\delta^2 n^\mu}{\delta s^2} + R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha n^\beta U^\gamma = 0 \tag{8.10a}$$

である。

(8.10a) に対して粒子は測地線に沿って動く。(8.10a) は測地偏差の方程式と呼ばれる。

8.2　質量四重極検出器

8.1図の検出器† を論ずるために，二つの世界線は二つの質量のそれである と想像しよう。n^γ が

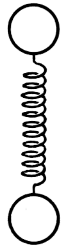


図　8.1

$$n^\gamma = r^\gamma + \xi^\gamma \tag{8.11}$$

で与えられるとしよう。ただし大きい内部減衰の極限で

$$\frac{\delta r^\gamma}{\delta s}=0, \qquad \text{（すべての } s \text{ に対して）}$$
$$r^\gamma \to n^\gamma \tag{8.12}$$

によって r^γ は定義され，すべての成分 $R^\mu{}_{\alpha\beta\delta}=0$。(8.10) は

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2}+R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}U^\alpha U^\gamma[r^\beta+\xi^\beta]=\frac{f^\mu}{mc^2} \tag{8.13}$$

となる。

(8.13) の中で f^μ によって二つの質量における（非重力的な）力の差を記した。f^μ として復元力 $-k^\mu{}_\alpha\xi^\alpha$ および減衰力 $-cD^\mu{}_\alpha(\delta\xi^\alpha/\delta s)$ を仮定する。$k^\mu{}_\alpha$ および $D^\mu{}_\alpha$ はスプリングに関連したテンソルである。(8.13) はそのとき

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2}+\frac{D^\mu{}_\alpha}{cm}\frac{\delta \xi^\alpha}{\delta s}+\frac{k^\mu{}_\alpha \xi^\alpha}{mc^2}=-R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}U^\alpha U^\gamma[r^\beta+\xi^\beta] \tag{8.14}$$

となる。

いま，時間を重心の世界線の接線方向に走らせよう。振動子は自由落下している。クリストフェル記号が0となる座標を用い，(8.14) を ($\xi \ll r$を仮定して)

---

† これに幾分類似した配列は1959年の6月の Royaumont 会議で H. Bondi によって独立に提起された。

近似的な形式†に書く。

$$\frac{d^2\xi^\mu}{dt^2}+\frac{D^\mu{}_\alpha}{m}\frac{d\xi^\alpha}{dt}+\frac{k^\mu{}_\alpha\xi^\alpha}{m}=-c^2R^\mu{}_{0\alpha0}r^\alpha \tag{8.15}$$

(8.15) の中で調和振動子に対する推進力はリーマンテル ソ ルであることがわかる。変位の振幅または吸収される工率の測定はリーマンテンソルのある成分を計算することを可能にする††。

(8.15) から測地線に沿って伝播する局所ローレンツ座標系において R_{i0j0} のフーリエ変形が0にならないような任意の重力場から常にエネルギーが吸収されうることが結論できる。この測地線はそのときわれわれの調和振動子の重心の世界線である。

いま，シヌソイド状（弱い場の近似）の重力波が入射していると考えよう。x^1 軸の方向に向けられた振動子について，直交した一緒に動く座標系が用いられる。$k^\mu{}_\alpha$ と $D^\mu{}_\alpha$ は $k^1{}_1=k$ および $D^1{}_1=D$ という1成分だけをもつことが想像される。(8.15) のフーリエ変形をとると

$$\xi^\mu(\omega)=\frac{mc^2R^\mu{}_{0\alpha0}(\omega)r^\alpha}{(\omega^2m-i\omega D\delta^\mu{}_1-k\delta^\mu{}_1)} \tag{8.16}$$

に導かれる。

(8.16) は共鳴の位置 $-\omega^2m+k=0$ で，極大である。全体の散逸は $D=D_{ex}+D_{in}$ であり，D_{ex} は外部の散逸，D_{in} はアンテナの中の非可逆過程に関連し

---

† もし粒子が自由なら，(8.15) の第2項および第3項が0となる。7.2節において x^1 方向に進む局所平面重力波がゼロに等しい $R_{\mu010}$ をもつことを示した。そこで (8.15) からもし二つの密接に位置する自由粒子を結ぶベクトルが波の進行方向にあるならば相対的に変位は生じないことが結論される。自由な粒子に対してはもし粒子が横方向の平面内にあるときに相対的変位が極大にある。この結果はPiraniの仕事に現れた。

†† 自由なテスト粒子の加速と比べることによってリーマンテンソルを測定することは F. A. E. Pirani(2)(3) によって考察された。この章の結果は相互作用する粒子が実際上用いられねばならぬことを示す。

ピエゾ電気をもつ結晶の電位と R_{i0j0} との間の対応は，8.2節において論ぜられることであるが，量子化された一般相対論はおける測定の問題の考察に対する基礎を提供するだろう。結晶の体積が非常に小さいことが，音響学的な共鳴振動の波長が重力波の波長に比べて5桁小さい事実の結果によって必要とされる。

た内部の散逸である。D_{ex} をもつ補助装置に引き渡されうる工率は

$$\frac{1}{2}\omega^2 D_{ex}\xi^2 = \frac{m^2 c^4 (R^{\mu}{}_{0\alpha 0} r^{\alpha})^2 D_{ex}}{2(D_{ex}+D_{in})^2} \tag{8.17}$$

である。

(8.17) は $D_{ex}=D_{in}$ のとき極大であり，極大工率 P_M は

$$P_M = \frac{m^2 c^4 (R^{\mu}{}_{0\alpha 0} r^{\alpha})^2}{8D_{in}} \tag{8.18}$$

によって与えられる。

シヌソイド状の重力波がいま，線形質量四重極振動子によって輻射されたものと仮定する。変換則から良い近似で，輻射器の重心に固定された系で見られるような $R^{\mu}{}_{0\alpha 0}$ は，小さい速度に対しては検出器の重心に固定された系において見られるものと同じであることが示される。7.5節の線形質量四重極振動子に対する解を用いて $R^{\mu}{}_{0\alpha 0} r^{\alpha}$ の自乗平均値が計算され受信機のすべての可能な方向について平均される。t_{or} を線形質量四重極振動子の場合に球の上で平均された単位面積あたりの輻射工率であるとしよう。全輻射工率 P は

$$P = 4\pi r^2 t_{or} = \frac{G I_0{}^2 \omega^6}{15 c^5} \tag{8.19}$$

によって与えられ，I_0 は四重極モーメントの振幅である。(8.19) および場に対する知られた表式はそのとき，輻射器の軸に直交した方向における $R^{\mu}{}_{0\alpha 0} r^{\alpha}$ の2乗平均値として

$$[(R^{\mu}{}_{0\alpha 0} r^{\alpha})^2]_{av} = \frac{4\pi \beta^2 |r|^2 G}{c^5} t_{or} \tag{8.20}$$

を与える。

(8.20) の中で β は重力波の伝播ベクトルである。(8.18) と (8.20) を用いると

$$P_M = \frac{\pi m^2 \beta^2 |r|^2 G}{2c D_{in}} t_{or} \tag{8.21}$$

が得られる。内部散逸 D_{in} の影響はここで考察されるだろう。第1にアンテナ自身の中で非可逆過程は起こらないこと，また D_{in} は完全に検出器の輻射減衰によることを仮定する。線形質量四重極振動子に対する知られた解を用いて検出

器 D_{in} の輻射抵抗を計算することが可能となり

$$D_{\mathrm{in}}=\frac{2G\omega^4 m^2|r|^2}{15c^5} \tag{8.22}$$

となる。(8.21) と (8.22) から次式が得られる。

$$P_M\,(\text{輻射減衰のみ})=\frac{15\lambda^2}{16\pi}t_{\mathrm{or}} \tag{8.23}$$

(8.23) の意味することは，それ自身の再輻射によってだけ減衰する検出器に対する平均吸収断面積 S_A は

$$S_A=\frac{15\lambda^2}{16\pi} \tag{8.24}$$

である。

(8.24) からこれらの条件のもとで平均吸収断面積はおおざっぱに波長の 2 乗であり，重力定数とは独立であることがわかる。不幸にして内部減衰が輻射のためだけによるという条件はアンテナの中での他の非可逆現象が輻射減衰より何桁も大きいから実際には達成されない。これを明瞭にするために品質係数を計算しよう。それはQという記号で記され

$$Q=\frac{\omega\,(\text{極大蓄積エネルギー})}{\text{散逸された工率}}$$

によって定義される。輻射減衰に関連した Q を Q_R と記すと

$$Q_R=\frac{15c^5}{2G\omega^3 m|r|^2} \tag{8.25}$$

である。

$\omega=2\pi\times10^7$ における一つのアンテナに対して，合理的な値は $mr^2=10\mathrm{gcm}^2$ であり，式 (8.25) は $Q_R\sim10^{34}$ を与える。実際的なアンテナは $Q\sim10^6$ をもつことが期待されよう。

そこで重力輻射減衰より幾桁も大きい内部減衰によって制限された系を取り扱わねばならず，これらの条件の下では平均吸収工率はアンテナの種類と独立ではないだろう。極大の応答をもつように配列されたアンテナの向きに対して

$$[(R^{\mu}{}_{0\alpha0}r^{\alpha})^2]_{\mathrm{av}}=\frac{15\pi G\beta^2|r|^2}{c^5}t_{\mathrm{or}} \tag{8.26}$$

(8.26) と (8.18) は吸収される工率 P_A

$$P_A=\frac{15\pi Gm^2\beta^2|r|^2}{8cD_{\mathrm{in}}}t_{\mathrm{or}}=\frac{15\pi GmQ_{\mathrm{in}}\beta^2|r|^2}{8\omega c}t_{\mathrm{or}} \tag{8.27}$$

に導く。

(8.27) の中で Q_{in} は内部非可逆過程に関連した Q, $Q_{\mathrm{in}}=\omega m/D_{\mathrm{in}}$ である。(8.27) によって意味される断面積 S は

$$S=\frac{15\pi GmQ_{\mathrm{in}}\beta^2|r|^2}{8\omega c} \tag{8.28}$$

連続スペクトルに対して吸収工率は

$$\begin{aligned}P_A&=\frac{1}{t'}\int_{-t'/2}^{t'/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m^2c^4D_{\mathrm{ex}}\omega\omega' R^{\mu}{}_{0\alpha0}(\omega)R^{\mu}{}_{0\beta0}(\omega')r^{\alpha}r^{\beta}e^{i(\omega-\omega')t}}{2(-\omega^2m+i\omega D+k)(-\omega'^2m-i\omega' D+k)}d\omega d\omega' dt\\&\approx\pi^2Gmc^{-1}\beta^2|r|^2t_{\mathrm{or}}(\omega_0)\end{aligned} \tag{8.29}$$

(8.29) において $t_{\mathrm{or}}(\omega_0)$ は共鳴振動数 ω_0 の近傍における t_{or} の工率スペクトルである。

さらにこれらの結果を議論するためには重力波による連続的な媒質の励起を考えねばならない。このことはバネの質量と波との相互作用を説明するために，またバネの弾性力の伝播の速度が有限である効果を説明できるために必要である。

8.3　重力波と結晶の相互作用

われわれの議論の出発点は表式 (8.10) である。無限小ベクトル n^{μ} は結晶中の標準点から隣接する点に向いている。質量 m はその隣接点を囲む無限小の体積に属すると想像される。(8.10) の右辺にはいま，弾性力と散逸力の両方を含めねばならない。n^{μ} を

$$n^{\mu}=r^{\mu}+\theta_{\alpha}{}^{\mu}r^{\alpha} \tag{8.30}$$

と書く。r^{μ} は次の条件によって定義される。大きい内部減衰と平担な空間の極限において

$$\begin{aligned}&\frac{\delta r^{\mu}}{\delta s}=0, \qquad \text{(すべての } s \text{ に対して)}\\&r^{\mu}\to n^{\mu}\end{aligned} \tag{8.31}$$

いま (8.10) 式を次の形に表すことができる。

$$r^{\mu}\frac{\delta^2\theta_{\mu\nu}}{\delta s^2}+r^{\mu}B\frac{\delta\theta_{\mu\nu}}{\delta s}+r^{\mu}Y^{\alpha\beta}\frac{\delta^2\theta_{\mu\nu}}{\delta x^{\alpha}\delta x^{\beta}}+R_{\nu\alpha\mu\beta}[r^{\mu}+\theta_{\gamma}{}^{\mu}r^{\gamma}]U^{\alpha}U^{\beta}=0 \tag{8.32}$$

ここでは等方的な結晶を仮定している。第2項は内部減衰を説明し，第3項は弾性力を説明する。B と $Y^{\alpha\beta}$ は質量密度1に規格化される。ふたたび U^{α} は世界線に接する単位ベクトルである。r^{μ} は任意に指定できるから

$$\frac{\delta^2\theta_{\mu\nu}}{\delta s^2}+B\frac{\delta\theta_{\mu\nu}}{\delta s}+Y^{\alpha\beta}\frac{\delta^2\theta_{\mu\nu}}{\delta x^{\alpha}\delta x^{\beta}}+R_{\nu\alpha\mu\beta}U^{\alpha}U^{\beta}+R_{\nu\alpha\mu\beta}U^{\alpha}U^{\beta}\theta_{\mu}{}^{\gamma}=0 \tag{8.33}$$

ということが帰結される。

(8.33) において第4項は明らかに指標 ν と μ について対称である。(8.33) の最後の項は第4項に比べて何桁も小さいから通常落とされてよい。$\theta_{\mu\nu}$ の対称部分であるところの歪テンソルに対して

$$\frac{\delta^2\theta_{\mu\nu(sym)}}{\delta s^2}+B\frac{\delta\theta_{\mu\nu(sym)}}{\delta s}+Y^{\alpha\beta}\frac{\delta^2\theta_{\mu\nu(sym)}}{\delta x^{\alpha}\delta x^{\beta}}\approx -R_{\nu\alpha\mu\beta}U^{\alpha}U^{\beta} \tag{8.33a}$$

と書いてよい。

(8.33a) の特別な場合，すなわち音響学的な縦波の励起を考えてみよう。(観測者の世界線に接する時間方向をもつ) 直交座標系 x^1 方向の波に対して近似形は

$$y\frac{\partial^2\theta}{\partial(x^1)^2}-\rho_M\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-b\frac{\partial\theta}{\partial t}=c^2\rho_M R^1{}_{010} \tag{8.34}$$

である。(8.34) において ρ_M は密度，y は適当な量，そして b は減衰定数である。$R^1{}_{010}$ が入射シヌソイド状重力波にその起源をもち

$$c^2R^1{}_{010}=-fe^{i(\omega t-\beta_k x^k)} \tag{8.35}$$

であることを仮定する。

(8.35) の中で指標 k は1から3まで走る。v_s を音速 $\sqrt{[y/\rho_M]}$ とし，λ_s を音の波長，$k_s=2\pi/\lambda_s$，$\alpha=b/2\rho_M v_s$，および $\gamma=\alpha+ik_s$ としよう。そのときよい近似で (8.34) の解は

$$\theta=[A\gamma\cosh\gamma x^1-f\omega^{-2}e^{-i\beta_k x^k}]e^{i\omega t} \tag{8.36}$$

である。結晶の重心に相対的な点の変位は，それをわれわれはξと記すが，x^1に関する（8.36）の積分によって

$$\xi=\left[A\sinh\gamma x^1-\frac{f}{i\beta_1\omega^2}(1-e^{-i\beta_1x^1})\right]e^{i\omega t} \tag{8.36a}$$

として計算されうる。

θが両端で0となる境界条件を利用すると

$$A\approx\frac{f\cos\beta_1 l}{\omega^2\gamma(i\alpha l\sin k_s l+\cos k_s l)} \tag{8.37}$$

に導かれる。

（8.37）の中でlは結晶の長さの半分である。（8.36）の第1項は音響学的な波†の寄与を与え，第2項は内力がまったく存在しないとしたときにも存在するであろう歪みを意味する。（8.37）はもし結晶がピエゾ電気をもつなら修正されねばならない。

（8.37）は$k_s l$が$\pi/2$の奇数倍のとき極大をもつ；けれども極大値の最大は最初のものであり，それは対して全長が音響学的な波長の半分であることは分母から明らかである。二つの質量とばね（8.1図）から成り立つ系は，質量の間隔が音響学的波長の半分に近づくとき，（8.34）のような方程式によって記述されねばならない。（8.28）から期待できる最大値はrがバネの中の音響学的な波長の半分のときに生ずるだろうことは明らかである。これは音響学的波の速さが光速より5桁ほど小さいから重要な制限であり，そこで（8.28）によって意味される断面積は，ばねの弾性力が光速をもって伝播したと仮定したとき

† （8.36a）の研究は，地球表面におかれた装置はあたかもそれが自由落下であるかの如く振舞うだろうことを示す。なぜなら地球自身の規準座標に（8.36a）を適用して，地球の内部運動への重力波の効果を考えよう。右辺の第1項は音響学的な波を表し，残りの項は相互作用がなかったと仮定したときの運動を表す。これらの項の比は，（8.37）を用いて

$$\frac{\beta_1\omega^2 A}{f}\approx\frac{\lambda_s}{\lambda\alpha l}=\frac{v_s}{c(\alpha l)}$$

である。

音速と光速との比は約10^{-5}であり，地球の中の音に対する吸収係数αと長さの積よりもずっと小さい。この議論は地球の半径と同程度のあるいはそれより短い重力波の波長に対してだけ成り立つ。

にもつであろう値より10桁小さい。そういう制限は沢山の方法でのり越えることができる。電場あるいは磁場によって光速をもって伝達される復元力を用いることもできよう。ピエゾ電気効果を使うこともできるかもしれない。その場合には結晶面の上の偏極電荷が音響学的波の各半波長で符号を変えないようなある応力成分を生ずるであろう。

ピエゾ電気の結晶の中で歪みは

$$P_\mu = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathscr{E}^{\alpha\beta}{}_\mu$$

で与えられる電気的な分極 P_μ を生ずる。ここで $\mathscr{E}^{\alpha\beta}{}_\mu$ はピエゾ電気的な応力テンソルである。電気的な分極は結晶の上で電場をひき起こす。その積分された値は雑音の低いラジオ受信機で観測されるために十分に大きい端子電位を与えるかもしれない。この電位の測定はもし適当な定数をもった結晶が用いられるならリーマンテンソルの成分 R_{i0j0} を測る。

結晶中の応力の系はもしそれがピエゾ電気的であるなら，意味のある方法で変更を受ける。ピエゾ電気定数を含む付加項は (8.33) 式に付加される必要がある。非常に簡単な例を考えてみよう。x^1 方向に音速をもって単独の縦波のモードが励起されたと考えよう。x^2 方向にある厚さは小さいものとし，x^2 方向に垂直な結晶面が導体によって鍍金されるものと仮定しよう。ピエゾ電気の関係式(5)は

$$-T = \theta Y_0 + DH/4\pi; \qquad E = D/K + H\theta \tag{8.38}$$

(8.38) の中で T は応力，K は誘電定数，θ は歪み，Y_0 は弾性率，E は電場の密度，そうして D は電気変位である。D と E の両方は x^2 方向のみに成分を持つと仮定される。Hは開いた回路の電位を歪みに結びつけるピエゾ電気定数である。(8.38) と結晶の質量要素の運動方程式の研究から (8.34) に似た波動方程式が

$$y = Y_0 - H^2K/4\pi$$

をもつという結果が得られる。

x^2 方向に垂直な結晶面は導体をもって鍍金されているから $\partial E/\partial x^1 = 0$，結晶の自由端では $T=0$。もし結晶が外部のインピーダンス Z と結合しているな

ら

$$-\int E dx^2 = (4\pi)^{-1} Z \frac{\partial}{\partial t} \int D dx^1 dx^3$$

と書くことができる。

これらの境界条件および波動方程式（8.34）はそのとき

$$\theta = [A_1 \gamma \cosh \gamma x^1 - f\omega^{-2} e^{-i\beta_k x^k}] e^{i\omega t} \tag{8.36a}$$

という結果に導く。ここで γ，β および f はすでに定義された通りである。これは（8.36）と同じ形をもつが，定数 A_1 は x^1 方向の長さ l_1，x^2 および x^3 方向の長さ l_2 と l_3 を用いて与えられる。また“固定した（clamped）”電気容量 C を

$$A_1 = \left(\frac{f}{\beta_1 \omega^2}\right)$$

$$\left[\frac{8\pi^2 \beta_1 l_2 (1 + i\omega CZ)(Y_0 - H^2 K/4\pi) \cos \beta_1 l_1/2 + i H^2 K^2 l_3 \omega Z \sin \beta_1 l_1/2}{8\pi^2 l_2 (Y_0 - H^2 K/4\pi)(\gamma \cosh \gamma l_1/2)(1 + i\omega CZ) + i\omega Z H^2 K^2 l_3 \sinh \gamma l_1/2}\right] \tag{8.39}$$

として，インピーダンス Z に結合したときに結晶の終端に現れる電位は

$$V = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{i\omega Z H K l_3}{1 + i\omega CZ}\right)[A_1 \sinh \gamma l_1/2 - (f/\beta_1 \omega^2) \sin \beta_1 l_1/2] \tag{8.40}$$

である。（訳者註：電位 V と体積 V に注意）

電気的な回路網の定理によって，検出器によってラジオ受信機に引き渡される工率のまともな計算を行うことが許される。シノソイド状の重力波が入射するときに通常の結晶した石英に類似した定数をもつ結晶に対して伝達されうるところの工率はおおざっぱに

$$P_A \approx 10^{-25} \omega^{-1} V Q_t t_{or} \ \text{erg/sec} \tag{8.41}$$

（8.41）の中で ω はふたたび角振動数であり，t_{or} はエルグ/cm²·sec で表した入射重力波の工率の流れである。Q_t は結晶および関連した電気回路の Q である。$\omega \sim 10^3$ における1立方メートルの結晶は吸収に対する断面積 $\sim 10^{-14}$cm² を与える。これは完全な結晶で正のフィードバックなしに働く増幅器に対してである。不完全な結晶は3桁小さい断面積をもつだろう。工率のスペクトル関

数 $t_{\mathrm{or}}(\omega)$ をもつ連続スペクトルに対して，吸収される工率は

$$P_A \approx 10^{-25} V t_{\mathrm{or}}(\omega_0) \ \mathrm{erg/sec} \tag{8.42}$$

である。

(8.41) および (8.42) は感度の議論に対する基礎を提供する。マイクロ波分光学においてでたらめなふらつき以外のすべてのにせの効果が認知されうることが見いだされた。同様な仮定がここでなされるだろう。でたらめなふらつきは部分的には熱的な起源をもち，部分的には自発的な放出過程の結果である。シノソイド波の同期検出の場合に検出器の工率出力は

$$P_{N1} = \frac{N\hbar\omega}{8\tau_A[e^{\hbar\omega/kT}-1]}$$

によって与えられる雑音工率(6) P_{N1} を越えるにちがいない。k はボルツマン定数，T は重力波アンテナの温度，N は受信機の雑音因数（25より小さく1より大きいことが期待される），τ_A は平均化の時間である。もし連続スペクトルをもつ輻射で研究されつつあるなら異なった表式が要求される。この場合に検出器によって引き渡される工率は

$$P_{N2} = \left(\frac{\pi^3\omega}{64\tau_A Q_t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\right]$$

を越えるに違いない。

ここで記述される方法を用いて星間空間†の重力波の輻射††を探すために実験

† J. A. Wheeler は重力輻射の密度は $10^{-29} \sim 10^{-28}$g/cm^3（$\sim 10^3$erg/cm^{2}sec）程度の大きさになりえて，しかも宇宙の膨張率についての現在の知識と矛盾がないことを注意した。(onziéme Conseil de l'Institut International de Physique Solvay, La Structure et l'évolution de l'universe, Editions Stoops, Brussels, 1958, p.112)。彼と M. Schwarzschild（私信）は続いて，もしこの輻射が銀河系の中へ不均質に物質を集めたのと同じ過程によって解放されたとすれば，その当時において，したがってまた同じ長さの尺度によって，今日 10^{24}cm のオーダー（10^6 年の振動周期）によって特徴づけられるだろうことに注目した。

$$\left(\frac{\partial g_{\text{典型}}}{\partial x}\right)^2 \sim \frac{\rho_M G}{c^2} \sim 0.2 \times 10^{-56} \mathrm{cm}^{-2}$$

$$\delta g_{\text{典型}} \sim 0.5 \times 10^{-28} \mathrm{cm}^{-1} \times 10^{24} \mathrm{cm} \sim 10^{-4}$$

これはこれらの方法を用いれば測定するために小さすぎもしなければ遅すぎもしないように思われるだろう。 ↗

が計画されつつある。第一の方法の場合には地球自身がアンテナを構成する物質の塊である。地球の規準モード(1時間あたり約1サイクル)は入射重力波によって励起される。この手続きは地球の比較的低いQおよびその芯の高い雑音のバックグラウンドによって制限される。8.2図の装置は第2の方法において用

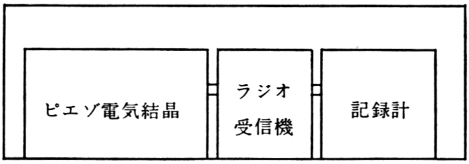


図 8.2

いられ，その中で結晶の中に誘起される歪みが使われる。振動数$\sim 10^3$サイクル/sec での探求が計画されている。地球は装置を回転させる。もし輻射がある与えられた方向から入射するなら，増幅器の雑音出力における一日の変化からそのことが観測されうる。8.3図の配列は回転を要求するのではない。もし

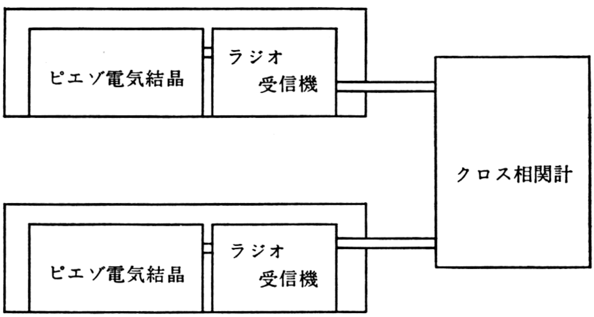


図 8.3

↘†† この線に沿った実験的な仕事は David Zipoy および Robert L. Forward が著者と協力して遂行されつつある。ピエゾ電気効果は一辺が沢山の音響学的波の波長に相当するような質量が用いられるときに感度を増大させる。低い振動数では音響学的半波長の長さをもつところの質量はすでに非常に大きく，単独の結晶としては得られないであろうからこのことは重要ではない。金属の大きな塊の中で音響学的共鳴振動の励起は重力波によって，8.2図および8.3図の配列に従って考慮されている。

輻射線が入射するならそれは相関をもつ出力をひき起こすだろう。内部的なふらつきのすべての源は相関をもたないであろう。メーザー(7)のような低い雑音の増幅器が用いられてよい。

装置は地球の振動に応答してはならない。Zipoy 博士は，その効果を感ずるとそれを打ち消すような量だけ動かすような増幅器をもつ巧みな音響フィルターを提案した。

8.4　重力輻射によって誘起された回転

Dirac（私信）は天文学的な異常が重力輻射の効果と相関があるかもしれないことを暗示した。これを議論するために，また回転を観測することによる検出を考えるために表式(8.5)に戻ろう。一群の質量が座標系の空間の原点の近くに置かれているとし，無限小ベクトル r^μ を質量の一つの位置ベクトルであるとしよう。$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}$ をレヴィ・チヴィタのテンソル密度としよう。(8.5)に $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta$ をかけて次式を得よう。

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\alpha}{ds}=\frac{d}{ds}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{dx^\alpha}{ds}+\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}U^\gamma U^\delta=\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta F^\alpha/mc^2 \tag{8.43}$$

ここでふたたび U^δ は世界線に接する単位ベクトルであり，(8.43)の第2項でわれわれは恒等式 $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}U^\alpha U^\beta=0$ を用いた。原点の世界線をクリストッフェル記号が0となる道筋であるとしよう。そのとき(8.43)は

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\alpha}{ds}=\frac{d}{ds}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{dx^\alpha}{ds}+\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}}{\partial x^\omega}U^\gamma U^\delta r^\omega \tag{8.44}$$

と書かれることが結論される。これらの座標において $R^\alpha{}_{\gamma\omega\delta}=\partial\Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}/\partial x^\omega$ であり，そこで(8.44)は

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\alpha}{ds}=\frac{d}{ds}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{dx^\alpha}{ds}-\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}R^\beta{}_{\gamma\omega\delta}U^\gamma U^\delta r^\alpha r^\omega \tag{8.45}$$

となる。もしいま(8.43)と(8.45)を用いてすべての質量について和をとるなら次式が得られる。

$$\sum_{\text{質量}}\frac{d}{ds}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^\beta\frac{dx^\alpha}{ds}$$

$$=\sum_{\text{質量}}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}R^{\beta}{}_{\gamma\omega\delta}U^{\gamma}U^{\delta}r^{\alpha}r^{\omega}-\sum_{\text{質量}}\frac{\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^{\alpha}F^{\beta}}{mc^{2}} \tag{8.46}$$

(8.46) はトルクと角運動量の変化の間の関係式の一般化である。もし非重力的な力は働いておらず重心の世界線に接して時間方向をえらぶなら，(8.46) は

$$\sum_{\text{質量}}\frac{d}{ds}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}r^{\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}=\sum_{\text{質量}}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\kappa}R^{\beta}{}_{0\omega0}r^{\alpha}r^{\omega} \tag{8.47}$$

となる。

(8.47) を連続スペクトルをもつ入射重力輻射によってひき起こされる地球の回転の周期における不規則なふらつきの計算に応用できる。これらの条件の下で技巧を使わない計算をすると

$$\frac{(\varDelta L)^{2}{}_{\mathrm{ms}}}{L^{2}}\approx\frac{25\pi G}{\omega^{2}c^{3}}t_{\mathrm{or}} \tag{8.48}$$

という結果に導かれる。

ここで $(\varDelta L)^{2}{}_{\mathrm{ms}}$ は地球の角運動量におけるふらつきの自乗平均であり，L は回転の角運動量，そして t_{or} は，そのフーリエ変形がゼロ振動数の近くに集中していると仮定して，erg/cm^{2}sec 単位で表した全重力波束である。もしすべての地球の回転の異常が重力波の入射のためであると勝手に仮定してみるなら，t_{or} は 5×10^{8}erg/cm^{2}sec であると計算される。このことから地球の回転は異常の大きさが減少されうるのでなければ有用な検出器ではないことが明らかである。他の天文学的な異常はもっと大きい数字に導く。

8.5 重力波の生成

実験室の中で検出されるように十分高いエネルギーをもつ重力波を作り出すことができるとしたらたいへん望ましいことであろう。たくさんの重要な実験がなされうるだろう。

自転している棒の場合に (7.56) が輻射工率 P_R に対する公式

$$P_R=1.73\times10^{-59}I_m{}^2\omega^6\ \mathrm{erg/sec} \tag{8.49}$$

を与えた。与えられた慣性モーメント I_m に対して角振動数 ω を棒が最終的に

壊れてしまうまで増加させることができる。もしωの極大値を張力の強さによって表し，その結果を弾性率と歪みを用いて表現するなら，長さlに対して

$$l=\lambda_s\sqrt{[2\delta]}/\pi \tag{8.50}$$

という公式を得る。

(8.50) の中でδは物質に対する極大の許容された歪みであり，λ_sは破壊に対する角振動数における棒中の音の波長である。(8.50) の意味は棒によって輻射されうる重力波の波長は少なくとも棒の長さの1,000,000倍であることである。また慣性モーメントはおおよそ

$$\frac{10^{-3}\rho_M\lambda_s{}^5\delta^{\frac{5}{2}}}{12\pi^5} \tag{8.51}$$

より小さい値に制限される。(8.51) の中でρ_Mはふたたび密度であり，そして長さが横の寸法より一桁大きいところの比較的細い棒を考えている。(8.51) を (8.49) の中に使うと

$$P_R<4\times10^{-63}\rho_M{}^2v_s{}^{10}\delta^5\omega^{-4} \tag{8.52}$$

に導かれる。

(8.52) は (8.49) の見かけと異なって大きい棒を低い振動数で操作することは小さい棒の高い振動数をもつ自転よりも強い輻射を与えることを示している。約 10^{-30}erg/sec がそういう 1m の棒によって輻射されうる。

重力波の生成に対する新しい方法は場の方程式によって暗示される。重力場の源は応力エネルギーテンソルである。時間に依存する応力は電気的にピエゾ電気結晶の中に生じることができて，これらが輻射をひき起こす。弱場の解は，計量がローレンツ計量からおそらく10^{30}分の1だけ異なることが期待されるからこの種の議論に対してまったく適当である。弱場の解は

$$\varphi_\mu{}^\nu=h_\mu{}^\nu-\frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu h\approx\frac{4G}{c^4}\int\frac{(T_\mu{}'^\nu)_{遅延}d^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{8.53}$$

であることを思い起こそう。

(8.53) を結晶による輻射の問題に応用するために，音響学的な共鳴が使われ，1次元の圧縮波が作られることを仮定する。$\tau_\mu{}^\nu$ の成分はそのとき次式で与えられる。

$$T_0{}^0 \approx -\rho_M c^2 \left[1-\frac{V_p}{v_s}\cos\omega t\cos k_s x^3\right][1-U(x^3-l-A_0\cos\omega t)$$
$$-U(-x^3-l-A_0\cos\omega t)] \tag{8.54}$$

$$T_0{}^3 \approx \rho_M V_p c \sin\omega t \sin k_s x^3[1-U(x^3-l-A_0\cos\omega t)$$
$$-U(-x^3-l-A_0\cos\omega t)] \tag{8.55}$$

$$T_3{}^3 \approx -\rho_M V_p v_s \cos\omega t \cos k_s x^3[1-U(x^3-l-A_0\cos\omega t)$$
$$-U(-x^3-l-A_0\cos\omega t)] \tag{8.56}$$

これらの表式の中で波は x^3 方向に進み，V_p は粒子の速度，v_s は音速，そうして U は $x<0$ に対して $U(x)=0$，$x>0$ で $U(x)=1$ として定義された階段関数であることが仮定される。A_0 は自由端の振動振幅である。これらの表式を（8.56）の中に利用し，応力エネルギー擬テンソルのアインシュタイン形式を用いると全輻射工率を計算することが可能となる。A_0 の極大値は破壊が起こるまでに許容される極大歪みによって決定される。

石英の場合に音響学的な共鳴に対する結果は次式で与えられる。

$$P<\left[\frac{16}{15}G\rho_M{}^2S^2v_s\left(\frac{v_s}{c}\right)^5\times 10^{-6}\right]_\omega + \left[\frac{\pi}{15}G\rho_M{}^2S^2n_\lambda{}^2v_s\left(\frac{v_s}{c}\right)^5\times 10^{-12}\right]_{2\omega} \tag{8.57}$$

（8.57）の中で S は断面の面積，添字 ω をもった項は基本振動数における輻射の工率，そして第2項は基本振動数の2倍をもって輻射される工率を与える。共振器は音響学的半波長の n_λ 倍でなければならない。（8.57）の第1項は n_λ とは独立であることがわかる。これは $n_\lambda>1$ に対して結晶は本質的には与えられた四重極をもち，それの最も近接した隣りとは反対の位相をもって働く電気的四重極の集まりであるからである。結果として生ずる基本振動数の輻射は近似的に単独の四重極のそれである。各半波長の波の断片は相当するモーメント $MA_0\lambda_s/2\pi$ をもち，そこで M は単独な半波長の共振器の質量である；A_0 と λ_s は（8.54），（8.55）および（8.56）によって定義される。もし多数の別々の共振器が重力波の半波長より小さいさしわたしをもつ領域の中に置かれるならば，輻射工率は結晶の全数の2乗に比例するだろう。基本振動数において

10^{-15}erg/sec を輻射するためには，おのおのが音響学的な半波長の厚さで断面の面積が 50cm² をもつ 10^6 個の結晶が必要とされるだろう。複雑な位相をそろえる調整が正しく装置の列を働かせるために必要とされるだろう。

音響学的な共鳴振動を押えて，ピエゾ電気効果によってあるいは電歪によって，音響学的な各半波長ごとに符号を変えないところの力学的な応力成分を作り出す方がよいように思われる。これが可能であることを見るためには文献の中に与えられる(8)解を，厚さの方向を x^3 として，x^3 に垂直な面の上に電導体の鍍金をした，縦方向に振動する結晶の中の応力の成分 T_{11} について研究することだけが必要である。厚さは簡単のために小さいと仮定され，x^3 と平行に外部から適用された電場が結晶を動かす。成分 T_{11} はそのとき

$$T_{11}=d_{31}E_3\left[\frac{\sin\dfrac{\omega(L-x)}{v_s}+\sin\dfrac{\omega x}{v_s}-\sin\dfrac{\omega L}{v_s}}{\sin\dfrac{\omega L}{v_s}}\right]\sin\omega t \qquad (8.58)$$

(8.58) の中で d_{ij} は応力を電場に結びつけるテンソル，E_3 は x^3 の方向の電場，L は全体の長さである。共鳴のところで $L\omega/v_s=\pi$ であり，損失は分母の中の双曲関数によって (8.58) の中に考慮されねばならないだろう。けれども共鳴を離れると，たとえば $L\omega/v_s=\pi/2$ において，(8.58) は

$$T_{11}=d_{31}E_3\left[\cos\frac{\omega x}{v}+\sin\frac{\omega x}{v}-1\right]\sin\omega t \qquad (8.59)$$

となる。

(8.59) は音響学的な各半波長で符号を逆転しない成分 $-d_{31}E_3\sin\omega t$ をもつことがみられる。このように働かされる大きな単結晶は，したがって体積で積分された大きな応力成分を与えるだろう。放射工率は

$$P_R\approx\frac{GP^2{}_{\max}\lambda^4\pi^2}{120c^3} \qquad (8.60)$$

であることが期待されるだろう。

(8.60) の中で $P_{\max}$ はダイン/cm² 単位の有効張力の強さであり，λ はふたたび重力波の波長である。別の方法は固体かまたは液体の中での電歪を用いることであり。液体の場合には一辺が重力波の半波長程度の領域が用いられねば

ならないだろう。働く電場の空間微係数に電歪の応力を生ずるだろう。(8.60)に類似な結果が輻射工率を与える。

1m の長さの波が一辺 50cm の大きさの結晶によって放射されうるだろう。もしそれが破壊点のすぐ手前で運転されるなら，各結晶は P_{max} がその静的な発表された値であると仮定して 10^{-13}erg/sec を放射するだろう。これは 100,000 重力粒子/sec に相当する。前に考察された型の単結晶の検出器はこの波長において約 10^{-3}erg/sec の工率を検出できるだろう。したがって小さな実験室の中で作り出すことができるものと検出できるものの間にはやはり大きなギャップが存在する。複雑な検出と生成装置を使えばこのギャップを縮めることはできる。破砕点まで働かされる結晶の中で大量の電力が消費されねばならないだろう——たぶん 1 辺 50cm の結晶の中で 10^8 ワット。これはもし低温の操作がなされうるなら相当に減少させることができよう。また低温高振動の操作によって有効な張力の強さが増加するのではないかと期待するかもしれない。すべてのこれらの問題は注意深い実験的な調査を必要とする。もし前に使われた数が改良できないとすれば，一辺が 100m ほどもある結晶と大きな検出系を重力輻射の生成と検出のために必要とするであろう。

8.6　他の輻射実験

上の議論は非常に低いエネルギーの重力粒子に限定された。多数の計算がもっと高いエネルギーの輻射実験の実行可能性を調べる目的で著者によって遂行された。その結果は原子，分子および原子核の転移に相当する中間的なエネルギーではおそらく状況は望みがないことを示している。すでにみたように一般相対論の方程式は電気力学のそれに非常に類似した弱場近似の解をもっている。電気力学における最低次の輻射過程は，e を電子の電荷としたとき，e^2 に比例する放射を与える。選択規則が重力粒子の放射を許すような電子の転移は最低次において，m を電子の質量とすれば e^2 を Gm^2 で置きかえる必要がある点を除けば電気力学のそれと類似した表式によって計算できるだろう。他のあまり重要でない修正も存在する。ボーア半径と波長との比の自乗のオーダーの

他の因子が，四重極輻射が0でない最低次であるから，含まれねばならないだろう。いま $Gm^2/e^2 \approx 10^{-43}$ であって，重力粒子の放出は少なくとも光子の放射に比べて少なくとも43桁小さいだろうことが帰結される。極度に高いエネルギーでは質量が増加し電荷は増加しないから状況は改善されよう。$Gm^2/e^2 \approx 1$ に対して 10^{30}eV のオーダーのエネルギーが必要とされる。10^{20}eV さえ現存想像される機械の領域を越えているからそういう実験に対する展望はあまり有望でない。

文　献

1. F. A. E. Pirani, *Proceedings of the Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics*, 1957; ASTIA Document AD 118180, p.61.
2. F. A. E. Pirani, *Acta Phys. Polon.* **15**, 6, 389 (1956).
3. J. Weber, Gravity Research Foundation prize essays, New Boston, New Hampshire, April, 1958, and April, 1559.
4. J. Weber, *Phys. Rev.* **117**, 306 (1960).
5. W. P. Mason, *Electromechanical Transducers and Wave Filters*, Van Nostrand, New York, 1948 p. 202.
6. R. H. Dicke, *Rev. Sci. Instr.* **17**, 268 (1946).
7. J. Weber, *Revs. Modern Phys.* **31**, 681 (1959).
8. W. P. Mason, *Piezoelectric Crystals and Their Applications to Ultrasonics*, Van Nostrand, New York, 1950, p. 64.

第9章
一般相対論における選ばれたトピックス

原子を作りあげる初歩的な形成は重力によって結び合わされると考えるのには理由がある。　　A. Einstein

9.1 統一場理論

この終末の章では，哲学的な見地から大変に有意義であり，また素粒子理論の発展に導くかもしれない，一般相対論のある重要な側面について簡単な説明を与えよう。

重力場の幾何学化の成功は Einstein や他の人達に電磁気学を幾何学化する方法を探求させることになった。粒子を測地線に沿って運動させることによる力の望ましい除去は電気的な力が導入されるや否や止んでしまう。これはその中にローレンツ力を含む式 (4.54) によって示される。

一般相対論が定式化されたとき，自然にある唯一の力は重力と電磁気によるものであり，電磁場を幾何学化することによりすべての物理をカバーする統一的な取り扱いができると信じられた。場の方程式は左辺にある幾何学的な対象を右辺にある物理的対象に結びつける。Einstein はこれは望ましくないものであり，このような方法で電磁気的な応力テンソルを用いることはたかだか暫定的な解であると感じた。またアインシュタインは量子力学の基本要請を決して受け入れなかった。彼は素粒子と量子的な現象の完全に決定論的な記述が統一場(4)(5)に対する研究から出てくるものと期待した。

電気力学の完全な幾何学化はなし遂げられなかった。実際統一場の理論の探求は今日では核力や高エネルギー物理の現象が含まれねばならないだろうからずっと手に負えない仕事となっているようにみえる。

1916年の一般相対論と古典電磁気学は，通常物理的内容を変えることなしに，幾何学的な量 $R_{\mu\nu}$ のみによって表現されうることに興味がある。この部分的な幾何学化† は1927年に Rainich(1) により遂行され，最近は Wheeler (2)(3)と Misner とによって拡大された。われわれは電荷なしの重力と電磁場だけをもっていると考えよう。マックスウェルの応力テンソル（4.15）は次の関係式†† を満たす。

---

† 幾何学的解釈はマックスウェル・テンソルにはつけられない。それはマックスウェルの応力テンソルを $R_{\mu\nu}$ によって表すことによって方程式から除去される。

†† （9.1）と（9.2）は直接に（4.15）からでてくる。（9.3）を導くためには，またこの章の他の方程式の証明のためには次の関係式が大変有用である。一般化されたクロネッカーのデルタはレヴィ－チヴィタのテンソル密度を用いて

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\kappa}=\begin{vmatrix} \delta_\alpha{}^\mu & \delta_\beta{}^\mu & \delta_\gamma{}^\mu & \delta_\kappa{}^\mu \\ \delta_\alpha{}^\nu & \delta_\beta{}^\nu & \delta_\gamma{}^\nu & \delta_\kappa{}^\nu \\ \delta_\alpha{}^\rho & \delta_\beta{}^\rho & \delta_\gamma{}^\rho & \delta_\kappa{}^\rho \\ \delta_\alpha{}^\sigma & \delta_\beta{}^\sigma & \delta_\gamma{}^\sigma & \delta_\kappa{}^\sigma \end{vmatrix}$$

と書くことによって定義されうる。これは一般化されたクロネッカーのデルタが上または下の指標の任意の対の変換で符号を変えること，またもし同じ指標が上かあるいは下のグループに1回以上現れるならゼロになることを示している。

たいていの著者は $\varepsilon_{0123}=1$ および $\varepsilon^{0123}=1$ にえらぶ。同じ計算の中に $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ と $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ の両方を用いるときには注意が必要とされる。もし $F_{\mu\nu}$ の双対を

$$^*F_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}F^{\alpha\beta}/2$$

と選ぶなら

$$^*F^{\mu\nu}=g^{\mu\iota}g^{\nu\kappa}\varepsilon_{\iota\kappa\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}F^{\alpha\beta}/2$$

となる。まともな換算によって，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ を用いて上の表式と矛盾がないためには

$$^*F^{\mu\nu}=-\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(-g)^{-\frac{1}{2}}F_{\alpha\beta}/2$$

と書かねばないことが示される。

これらの表式は4次元空間の任意の二つの反対称テンソルに対して成り立つ次の恒等式を確立するために用いられうる：

$$A^{\nu\alpha}B_{\mu\alpha}-{}^*A_{\mu\alpha}{}^*B^{\nu\alpha}=\frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}$$

もし $A=B$ とおき，A を電磁場のテンソルとするなら，マックスウェルの応力テンソルは

$$T_\mu{}^\alpha=\frac{1}{4\pi}\left[{}^*F_{\mu\kappa}{}^*F^{\alpha\kappa}+\frac{1}{4}\delta_\mu{}^\alpha F_{\iota\kappa}F^{\iota\kappa}\right]$$

と書くことができる。これに（4.15）で与えられるような $T_\alpha{}^\nu$ をかけると（9.3)が得られる。

$$T_{\alpha}{}^{\alpha}=0 \tag{9.1}$$

$$T_{00}>0 \tag{9.2}$$

$$T_{\mu}{}^{\alpha}T_{\alpha}{}^{\nu}=\frac{1}{4}(T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta})\delta_{\mu}{}^{\nu} \tag{9.3}$$

もし重力場の方程式が

$$R_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}{}^{\nu}$$

の形に書かれるなら，指標を縮約し（9.1）を用いると

$$R=0 \tag{9.4}$$

が導かれ，場の方程式は

$$R_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{9.5}$$

となる。(9.3）と（9.5）を使うと

$$R_{\alpha}{}^{\beta}R_{\beta}{}^{\gamma}=\frac{1}{4}\delta_{\alpha}{}^{\gamma}R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau} \tag{9.6}$$

が導かれる。

幾何学的な関係（9.4）と（9.6）は，その源が発散のないマックスウェル場であるような任意の重力場に適用される。もう一つの関係式が，それから $T_{\mu\nu}$（および $R_{\mu\nu}$）が組み立てられるところの反対称テンソルが本当にマックスウェル方程式を満たすことを保証するために必要となる。この付加的な関係式は

$$\left[\frac{\varepsilon_{\beta\lambda\mu\nu}R^{\lambda\gamma;\mu}R_{\gamma}{}^{\nu}\sqrt{-g}}{R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}}\right]_{,\iota}=\left[\frac{\varepsilon_{\iota\lambda\mu\nu}R^{\lambda\gamma;\mu}R_{\gamma}{}^{\nu}\sqrt{-g}}{R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}}\right]_{,\beta} \tag{9.7}$$

である。(9.4)，(9.6）および（9.7）は，電荷がないときの，重力と電磁気に対する定式化である。表式（9.7）は，Misner と Wheeler にしたがってその要旨が述べられるいくらか長い証明を必要とする。

ここで

$$^*F_{\mu\nu}=(\sqrt{-g})\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/2 \tag{9.8}$$

によって定義される電磁場のテンソル $F^{\mu\nu}$ の双対（dual）が要求されるだろう。演算 $e^{*\alpha}$ は

$$e^{*\alpha}F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}\cos\alpha+{}^*F_{\mu\nu}\sin\alpha \tag{9.9}$$

により定義される。(9.9) は $F_{\mu\nu}$† への双対回転 (duality rotation) を構成するという。テンソル $\xi_{\mu\nu}$ は

$$\xi_{\mu\nu}=e^{-*\alpha}F_{\mu\nu} \tag{9.10}$$

によって双対回転 $-\alpha$ に相当して定義される。

α の適当な選択によって $F_{\mu\nu}$ より単純なテンソルを得ることができる。不変量

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}(F_{\alpha\beta}\cos\alpha-{}^*F_{\alpha\beta}\sin\alpha)^2\\&=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta}\sin 2\alpha\end{aligned} \tag{9.11a}$$

$$\frac{1}{2}\xi_{\alpha\beta}{}^*\xi^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta}\cos 2\alpha \tag{9.11b}$$

を考えてみてみよう。E と H が $\xi_{\alpha\beta}$ に関連した電場と磁場としたとき，(9.11a) は H^2-E^2 であり，(9.11b) は $2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ であることを思い起こそう。角度 α を (9.11b) が 0 になるように選ぼう：他の不変量はそのとき

$$\frac{1}{2}\xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta}=\pm\left[\left(\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)^2+\left(\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{c^4}{2G}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{\frac{1}{2}} \tag{9.12}$$

となる。角度 α は (9.12) の右辺の表式の符号が負であることを要求することによってさらに象限について制限される。これらの要求に合致したところの場 $\xi_{\alpha\beta}$ は極値場と呼ばれる；それは適当なローレンツ系において純粋に電気的な場である。極値場は取り扱い便利な量である。この章の残りでは $\xi_{\alpha\beta}$ は極値場を記すことにしよう。任意の場は $\xi_{\alpha\beta}$ から双対回転とスケール因子によって得られる。マックスウェル応力テンソルに対する公式 (4.15) を用いて $T_{\mu\nu}$ のすべての成分が双対の回転によって不変であることが証明される。もしマック

---

† テンソルの双対の双対は，g が負であるという事実の結果として，はじめのテンソルに負号をつけたものである。双対の演算は角度 $\pi/2$ の双対回転角に対応する。

$$^*(e^{*\alpha}F_{\mu\nu})=e^{*\alpha *}F_{\mu\nu}$$

であることに注目することは重要である。また前の脚註の恒等式から

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=-{}^*F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta}$$

スウェル場から生ずる $R_{\mu\nu}$ が与えられたとしたとき，マックスウェル場を一義的に指定することはできないで，双対回転に定数を掛けたものを除きそれを決定できる。マックスウェル方程式を $\xi_{\mu\nu}$ を用いて書き，それから $R_{\mu\nu}$ によって，(9.7) に導くところの $\xi_{\mu\nu}$ について2次のもう一つの表式を書くことが便利であろう。マックスウェル方程式は

$$0=F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\left(\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}+{}^*\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\cos\alpha+\left({}^*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\sin\alpha \tag{9.13a}$$

$$0={}^*F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\left(-\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-{}^*\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\sin\alpha+\left({}^*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\cos\alpha \tag{9.13b}$$

として表される。これらを再配列して

$$\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}+{}^*\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}=0 \tag{9.14a}$$

$${}^*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}=0 \tag{9.14b}$$

が与えられる。マックスウェル場のテンソルは恒等式

$$F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha}-{}^*F_{\mu\alpha}{}^*F^{\nu\alpha}=\frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{9.15}$$

を満足する。(9.14a) に ${}^*\xi_{\beta\mu}$ を乗じ，(9.14b) に $\xi_{\beta\mu}$ を乗じて (9.15) を用いると

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^\beta}=\frac{-2({}^*\xi_{\beta\mu}\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}+\xi_{\beta\mu}{}^*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu})}{\xi_{\gamma\delta}\xi^{\gamma\delta}} \tag{9.16}$$

が得られる。

いま問題は (9.16) が幾何学的な量によって書くことができるようにマックスウェル場のテンソルをリッチのテンソルを用いて表わすことである。

便宜上，リーマンテンソルの対称性をもつようにリッチテンソルから組み立てられるところの4階テンソルが導入される。そういうテンソルは $E_{\tau\sigma}{}^{\mu\nu}$ であり

$$E_{\tau\sigma}{}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(-\delta_\tau{}^\mu R_\sigma{}^\nu+\delta_\sigma{}^\mu R_\tau{}^\nu-\delta_\sigma{}^\nu R_\tau{}^\mu+\delta_\tau{}^\nu R_\sigma{}^\mu) \tag{9.17a}$$

および

$$E^{\gamma\delta\beta\tau}{}_{;\tau}=\frac{1}{2}(R^{\delta\beta;\gamma}-R^{\gamma\beta;\delta}) \tag{9.17b}$$

によって与えられる。

あるローレンツ系において極値マックスウェルテンソルを考えることによって

$$\frac{c^4}{G}E_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\xi_{\alpha\beta}\xi_{\gamma\delta}-{}^*\xi_{\alpha\beta}{}^*\xi_{\gamma\delta} \tag{9.18a}$$

であることが証明されうる。これはテンソル方程式である; そこでそれは一般に成り立つ。

$$\frac{c^4}{G}E_{\alpha\beta\gamma\delta}E^{\gamma\delta}{}_{\mu\nu}=(R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau})^{\frac{1}{2}}(-\xi_{\alpha\beta}\xi_{\mu\nu}+{}^*\xi_{\alpha\beta}{}^*\xi_{\mu\nu}) \tag{9.18b}$$

もまた示すことができる。$\xi_{\mu\nu}\xi_{\sigma\tau}$ に対して (9.18a) と (9.18b) を解くと

$$\frac{G}{c^4}\xi_{\mu\nu}\xi_{\sigma\tau}=-\frac{1}{2}E_{\mu\nu\sigma\tau}-\frac{1}{2}(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})^{-\frac{1}{2}}E_{\mu\nu\gamma\delta}E_{\sigma\tau}{}^{\gamma\delta} \tag{9.19}$$

を得る。いまテンソル $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu}E_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu}(\delta_\alpha{}^\nu R_\beta{}^\mu-\delta_\beta{}^\nu R_\alpha{}^\mu) \tag{9.20}$$

によって定義し, $F_{\alpha\beta\gamma\delta}E^{\gamma\delta\beta\tau}{}_{;\tau}$ を

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta\gamma\delta}E^{\gamma\delta\beta\tau}{}_{;\tau}&=-\xi_{\mu\nu}\xi^{\mu\nu}({}^*\xi_{\alpha\beta}\xi^{\beta\tau}{}_{;\tau}+\xi_{\alpha\beta}{}^*\xi^{\beta\tau}{}_{;\tau})\left(\frac{G}{c^4}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu}(\delta_\alpha{}^\nu R_\beta{}^\mu-\delta_\beta{}^\nu R_\alpha{}^\mu)R^{\delta\beta;\gamma}\sqrt{-g}\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\delta\gamma\mu}R^{\delta\beta;\gamma}R_\beta{}^\mu\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{9.21}$$

のように計算しよう。(9.5) および, $F_{\mu\nu}$ を用いた $T_{\mu\nu}$ の関係式から式 (9.12) に導かれた; $-(G/c^4)\xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta}=(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{\frac{1}{2}}$。(9.21) と (9.16) を比べてマックスウェルの方程式から導かれる (9.16) が, リッチのテンソルを用いて

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^\beta}=\frac{\varepsilon_{\beta\lambda\mu\nu}R^{\lambda\gamma;\mu}R_\gamma{}^\nu\sqrt{-g}}{R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}} \tag{9.22}$$

として書けることがわかる。(9.22) は一つのスカラーの勾配であるから, そ

の回転は0になり，そこで表式（9.7）

$$\alpha_{,\beta\iota}=\alpha_{,\iota\beta} \tag{9.7}$$

を得る。

リッチのテンソルが与えられたとするとマックスウェル場を（双対の回転は別として）次のように決定してよい。（9.22）を用いよう。ある標準点を選んで

$$\alpha(x)=\int_p^x \alpha_{,\mu}dx^\mu+\alpha_0$$

を計算しよう。$\alpha_{,\mu}$ の回転が0となるから，これは径路とは独立で，α_0 は任意である。α のこの値は，（9.19）が各点で $\xi_{\mu\nu}$ を計算する目的で使えるから，$F_{\mu\nu}=e^{*\alpha}\xi_{\mu\nu}$ を得るために用いられてよい。（9.22）はゼロ場に対して存在しない。もう一つの基本的な困難ははじめの超曲面の上での許された幾何学的なデータが一つ以上のマックスウェル・テンソル(45)に相当してよいことである。この非一義性はたとえばはじめのマックスウェル場は二つの分離的領域の中に局所化されているときに存在する。領域の一つにおける双対回転は異なった物理を与えるがしかし有限の時間の間に幾何学的データを変更しないだろう。

Wheeler は電荷は多重連結であるところの非ユークリッド空間の位相をもった領域を承認することによって記述されうることを注意している。この方法で作られた一対の電荷の模式図は9.1図に示される。そういう理論は電荷とユ

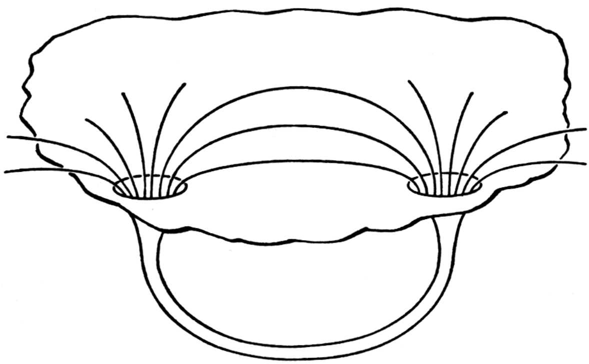


図　9.1

ークリッド空間の通常の位相をもった理論に同等である。Misner はそういう把手を通る線の全数は定数であることを注目した。

Wheeler は結合したマックスウェル・アインシュタイン方程式の解もまた議論した。彼の“ジェオン”(重力電磁気から成る実体)は重力(34)によって形を保ち，場から作り上げられたところの質量を賦与された対象である。

9.2 運動方程式

1927年に Einstein と Grommer(6) によって，質量系の運動方程式は重力場の方程式の中に含まれ，そこで電気力学におけるように別に要請される必要はないことが注意された。Bergmann は可能な運動についての束縛条件はビアンキ恒等式のような関係式の結果として生ずることを注意した；非線形性はそのときニュートン法則のような運動法則に導く。運動方程式を導くことおよびそれらの，輻射と保存則の問題との関連については広汎な文献が存在する。前に述べた重力波の検出と生成に対して提案された方法は重力による力と同様に電気的な力を含むことを強調したい。運動方程式と重力のみに対する輻射の問題の考察から導かれる任意の結論は第8章の結果には適用されないだろう。

次の運動方程式の議論は V. Fock(7) による。ゼロ近似では空間は平坦であると考えられ，ローレンツ計量が用いられる。応力エネルギーテンソルはそのとき（ラテン空間指標）

$$T^{00}\approx\rho_M c^2 \qquad T^{0i}\approx\rho_M c v^i \tag{9.23}$$

であるととられる。この近似では $T^{0\mu}{}_{;\mu}\approx T^{0\mu}{}_{,\mu}$ で，そうして

$$\frac{\partial T^{00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i}=0 \tag{9.24}$$

弱場の解 (7.13) は

$$\begin{gathered}\varphi_{00}=\frac{4G}{c^4}\int\frac{(T'_{00})_{\text{遅延}}d^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|};\ \varphi_{0i}=\frac{4G}{c^4}\int\frac{(T'_{0i})_{\text{遅延}}d^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\ \varphi_{jk}=\frac{2G}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{(T'_{00})_{\text{遅延}}x'^jx'^kd^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{gathered} \tag{9.25}$$

低い速さに対して $v/c\ll 1$ であり，そうしてこの近似で φ_{00} と φ_{0i} だけが残

される必要がある。(7.2) と (7.10) を用いてそのとき

$$g_{00}\approx -1+\frac{1}{2}\varphi_{00};\qquad g^{jk}\approx\delta^{jk} \tag{9.26}$$

$$g_{0i}\approx\varphi_{0i} \tag{9.27}$$

次の近似で $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ を考慮しなければならない；これから (3.38) を用いて

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}+\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}T^{\mu\alpha}=0 \tag{9.28}$$

が得られ，それを

$$\frac{\partial T^{00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^{i}}+\Gamma^{0}{}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}+\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}T^{0\alpha}=0 \tag{9.29}$$

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial T^{k}}+\frac{\partial T^{i0}}{\partial x^{0}}+\Gamma^{i}{}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}+\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}T^{i\alpha}=0 \tag{9.30}$$

と書くことができる。

最後の表式 (9.30) は，ニュートン力学の近似で運動方程式であることがわかるだろう。ふたたび小さい速さに対して $T_{00}\gg T_{ij}$ である。これを使ってただ1次の項だけを残すと

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_M v^i)+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}-\frac{G\rho_M}{c^2}\nabla\int\frac{(T'_{00})_{遅延}d^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=0 \tag{9.31}$$

に導かれる。ρ_M は物体の局所静止系で測られたときの物質密度である。左辺の第1項は慣性項，第2項は圧力の空間微係数による単位体積あたりの力であり，最後の項は重力ポテンシャルの勾配である。

Papapetrou(35) にしたがって，1粒子に対する測地方程式を導くことができる。第1に形式 (3.76) を用いて関係式 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ を全3次元空間の上で積分しよう。表面積分の項は，その粒子が局所的に存在するから落としてよい。そうして

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T^{\mu 0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x=-\int\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x \tag{9.28A}$$

を得る。ここで積 $x^{\tau}T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ を3次元空間で積分して，ふたたび表面積分を落とすと

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int x^\gamma T^{\mu 0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x=\int T^{\mu\gamma}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x-\int x^\gamma \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x \tag{9.28B}$$

という結果が得られる。

これらの被積分関数は小さい領域を除いて0であるから，$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$を級数

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}={}_0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}+{}_0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\sigma}\delta x^\sigma+\cdots$$

によって表現するのが適当である。

前の添字0は粒子の位置としてえらばれる点での値を表す。ここで粒子の構造について考慮がなされねばならない。Papapetrou は単独の極の粒子を，いくつかの積分 $\int T^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x$ だけを0に等しくなくさせるものとして定義する。単極-双極粒子は少なくともいくつかの積分 $\int T^{\mu\nu}\delta x^\rho(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x$ および $\int T^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x$ を0に等しくないものとさせる。高次の多重極への拡張も明白である。単極の粒子に対して $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ に対する級数の第1項だけが必要とされ，関係式（9.28A）および（9.28B）は

$$\frac{d}{dx^0}T^{\alpha 0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x+{}_0\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\int T^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x=0 \tag{9.28C}$$

$$\int T^{\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x=\frac{dx^\alpha}{dx^0}\int T^{\beta 0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x \tag{9.28D}$$

となる。(9.28D) の中で $\beta=0$ としよう。これは4元速度 $U^\alpha=U^0dx^\alpha/dx^0$ を用いて

$$\int T^{\alpha 0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x=m\frac{dx^\alpha}{dx^0}=m_0U^\alpha \tag{9.28E}$$

を与える。静止質量 m_0 は $(U^0)^{-1}\int T^{00}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x$ に等しく置かれた。(9.28E) を（9.28C）に戻って代入すると

$$\int T^{\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}d^3x=m_0U^\alpha U^\beta/U_0 \tag{9.28F}$$

に導かれる。

いま (9.28F) を (9.28C) に中に使うことができる。(9.28E) を用いた後で結果は

$$\frac{dU^{\mu}}{ds}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta}=0 \tag{9.31A}$$

であり，それは測地方程式である。

この手続きを拡張すると単極－双極粒子に対する運動方程式が与えられる。スピン $I^{\alpha\beta}$ は

$$I^{\alpha\beta}=\int\delta x^{\alpha}T^{\beta0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^{3}x-\int\delta x^{\beta}T^{\alpha0}(-g)^{\frac{1}{2}}d^{3}x$$

によって定義され，$I^{\alpha\beta}$ に対する運動方程式は

$$\frac{\delta I^{\alpha\beta}}{\delta s}+U^{\alpha}U_{\rho}\frac{\delta I^{\beta\rho}}{\delta s}-U^{\beta}U_{\rho}\frac{\delta I^{\alpha\rho}}{\delta s}=0 \tag{9.31B}$$

となる。ふたたび，第8章におけるごとく，$\delta/\delta s$ は s に関する共変微分を記す。

Schiff(36) は地球の重力場の中で，非重力的な束縛力 $\boldsymbol{F}$ をもつところのこまの歳差運動を調べるために (9.31B) を用いた。彼の最低次での結果は一緒に動く観測者によって測定されるスピンベクトル $\boldsymbol{I}^{0}$ が方程式

$$\frac{d\boldsymbol{I}^{0}}{dt}=[\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{v}/2mc^{2}+(3GM/2c^{2}r^{3})\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$
$$+(GJ/c^{2}r^{3})(3[\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}]\boldsymbol{r}/r^{2}-\boldsymbol{\omega})]\times\boldsymbol{I}^{0} \tag{9.31C}$$

を満足するということである。(9.31C) において $\boldsymbol{v}$ はこまの速さであり，J は地球の慣性モーメント，$\boldsymbol{\omega}$ は地球の角速度，$\boldsymbol{r}$ は動径座標である。右辺の第1項は特殊相対論のトーマス歳差運動を与え，第2と第3項は一般相対論の効果である。地球上でくるくるまわるこまに対して1日に $\sim10^{-8}$ ラジアンの歳差運動が期待されるだろう。地上でのあるいは人工衛星の実験におけるそういう効果の観測は一般相対論のテストを提供しよう。幾分類似した提案は R. A. Ferrell (Gravity Research Foundation Essay, New Boston, New Hampshire, April 1, 1959) および後に R. A. Pugh (Weapons Systems Evaluation Group Memorandum 11, November 12, 1959) によって表明された (unpublished)。

場の方程式の左辺のみを用いて純粋に幾何学的な方法(8)(9)で孤立した質量の

運動方程式を導出することが可能である。輻射の効果を含む運動方程式への高次の近似は多数の著者(10)(25)(27)によって得られている。

9.3 マッハの原理

マッハの原理によれば慣性はまったく物体の相互の作用によるものであるという。それゆえにある粒子は宇宙の中の他の物体と相対的にそれを加速するために力を必要とするものと考えられる。少なくとも遠心力の一部分は，一般相対論において，相互的な効果として現れる。$(v/c)^2$ までの項を残して，空間指標に対する測地方程式を考えてみよう；

$$-\frac{d^2x^i}{ds^2}=\Gamma^i{}_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2+2\Gamma^i{}_{j0}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^0}{ds}+\Gamma^i{}_{jk}\frac{v^iv^k}{c^2}$$

ここで v は粒子の通常の速度である。$h_{\mu\nu}$ の1次までとるとクリストッフェル記号は

$$\Gamma^i{}_{00}\approx-\frac{1}{2}h_{00,i}+h_{0i,0}$$

$$\Gamma^i{}_{j0}\approx\frac{1}{2}(h_{ij,0}+h_{i0,j}-h_{j0,i})$$

$$\Gamma^i{}_{jk}\approx\frac{1}{2}(h_{ij,k}+h_{ik,j}-h_{jk,i})$$

である。これらを代入すると測地方程式は

$$c^2\frac{d^2x^i}{ds^2}=\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\left[\nabla(c^2h_{00}/2)-\frac{\partial(ch_{0i})}{\partial t}\right]$$
$$+c^2\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^j}{ds}[h_{j0,i}-h_{i0,j}]-c^2h_{ij,0}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^0}{ds}-\Gamma^i{}_{jk}v^jv^k \tag{9.32}$$

半径R，静止質量Mの中空の球殻の中の運動を学ぶために(9.32)を用いる。第1に殻の内測の観測者に関して角速度 ω をもって殻を回転させよう。R_s，θ および φ を殻の要素の球面座標とし，a，θ_0 および φ_0 を場の成分を計算する殻内の点の球面座標としよう。U^μ は内側の観測者から見た殻の要素の4元速度を記するだろう。直交成分は

$$U^1=-\frac{\omega R_S\sin\theta\sin\varphi}{c\sqrt{[1-\omega^2R_S{}^2\sin^2\theta/c^2]}};\quad U^2=\frac{\omega R_S\sin\theta\cos\varphi}{c\sqrt{[1-\omega^2R_S{}^2\sin^2\theta/c^2]}}$$

$$U^3=0; \qquad U^0=\frac{1}{\sqrt{[1-\omega^2 R_S{}^2\sin^2\theta/c^2]}} \tag{9.33}$$

殻中の力学的応力は小さいと仮定され，そこで応力エネルギーテンソルは近似的に $\rho_M c^2 U^\mu U^\nu$ である。表式 (9.13) はそのとき

$$\Phi_\mu{}^\nu=\frac{4G}{c^2}\int\frac{\rho_M U'_\mu U'^\nu d^3\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{9.34}$$

$h_{\mu\nu}-\dfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}h$ という量に対して $\Phi_{\mu\nu}$ を用い，φ を座標

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=[a^2+R_S{}^2-2aR_S[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]]^{\frac{1}{2}} \tag{9.35}$$

に対してとっておく。$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}$ は級数に展開できる。

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}=\frac{1}{R_S}\Big[1-\frac{a^2}{2R_S{}^2}+\frac{a}{R_S}(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos[\varphi-\varphi_0])$$
$$+\frac{3a^2}{2R_S{}^2}(\sin\theta\sin\theta_0\cos[\varphi-\varphi_0]+\cos\theta\cos\theta_0)^2+\cdots\Big] \tag{9.36}$$

いま ρ_M は殻の要素の静止系における密度であり，一方 $d^3\boldsymbol{x}'$ は観測者の静止系における3次元の体積要素である。殻の静止系を用いて結果を表現するためには殻の静止系における体積要素 $d^2\boldsymbol{x}''$ は

$$d^3\boldsymbol{x}''=\frac{d^3\boldsymbol{x}'}{\sqrt{[1-v^2/c^2]}} \tag{9.37}$$

となって領域 $d^3\boldsymbol{x}'$ をおおうことに注目する。(9.33) から (9.37) までを用い，積分を遂行すると次数 v^2/c^2 まで

$$\Phi_{00}=\frac{4GM}{c^2R_S}\Big[1+\frac{\omega^2R_S{}^2}{3c^2}-\frac{2\omega^2a^2}{15c^2}+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta_0}{5c^2}\Big]$$

$$\Phi_{11}=\frac{4GM}{c^2R_S}\Big[\frac{\omega^2R_S{}^2}{3c^2}+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0}{5c^2}-\frac{\omega^2a^2}{15c^2}\Big]$$

$$\Phi_{22}=\frac{4GM}{c^2R_S}\Big[\frac{\omega^2R_S{}^2}{3c^2}+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi_0}{5c^2}-\frac{\omega^2a^2}{15c^2}\Big]$$

$$\Phi_{33}=0$$

$$\Phi_{12}=-\frac{4GM\omega^2a^2\sin^2\theta_0\cos\varphi_0\sin\varphi_0}{5c^4R_S} \tag{9.38}$$

$$\Phi_{10}=\frac{4GM\omega a\sin\theta_0\sin\varphi_0}{3c^2R_S}$$

$$\Phi_{20}=-\frac{4GM\omega a\sin\theta_0\cos\varphi_0}{3c^2R_S}$$

$$\Phi_{30}=\Phi_{23}=0$$

$$\Phi=\Phi_\mu{}^\mu=-\frac{4GM}{c^2R_S}\left[1-\frac{\omega^2R_S{}^2}{3c^2}\right]$$

という値となる。これらから $h_{\mu\nu}$ は

$$h_{\mu\nu}=\Phi_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\Phi \tag{9.39}$$

として計算できる。

(9.38) と (9.39) を調べると (9.32) の右辺の最後の2項は $(v/c)^2$ より1次高次であり，因数 dx^0/ds はいくつかの残りの項から落としてよい。この場合に測地方程式は

$$c^2\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}=\nabla V-\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{9.40}$$

の形を取り，ここで $V=c^2h_{00}/2$ および $A_i=ch_{0i}$ である。もし $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ とおき (9.40) を成分形式で書くなら殻の内側の粒子に対する運動方程式は

$$\begin{aligned}
c^2\frac{d^2x}{ds^2}&=\frac{GM}{3c^2R_S}\left[\frac{4}{5}\omega^2x-8\omega\frac{dy}{dt}\right]\\
c^2\frac{d^2y}{ds^2}&=\frac{GM}{3c^2R_S}\left[\frac{4}{5}\omega^2y+8\omega\frac{dx}{dt}\right]\\
c^2\frac{d^2z}{ds^2}&=-\frac{8GM\omega^2z}{15c^2R_S}
\end{aligned} \tag{9.40a}$$

である。

(9.40a) から，われわれはくるくるまわる殻の内側に静止している物体の上で遠心力を観測していることは明らかである。その効果は一般に小さなもので，宇宙における他の質量に相対的な回転から生ずる値に因子 $\sim GM/c^2R_S$ をかけたものである。この結果は Thirring によって前に与えられた。

もし殻が回転しないで内側のテスト用粒子に相対的に x^i 方向に平行移動の

加速度が与えられるなら，(9.34) と (9.37) から

$$h_{10}=\Phi_{10}=aA_1=-\frac{4GMv_S}{c^3R_S(1-v_S{}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{9.41}$$

を得る。ここで v_S は殻の速さである。(9.40) はそのとき内側で瞬間的に静止している粒子に対して

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\frac{4GM}{c^2R_S(1-v_S{}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{\boldsymbol{v}_S\boldsymbol{v}_S\cdot}{c^2(1-v_S{}^2/c^2)}\right)\boldsymbol{a}_S \tag{9.40b}$$

を与える。(9.40b) の中で $\boldsymbol{a}_S$ は殻の加速度である。

殻の代わりに中空でない質量 M を考え，小さい質量 m に相対的に M を加速しよう。もし m が瞬間的に静止しているならその加速度は (9.32) を用い (7.13a) のポテンシャルを使って計算されうる。もし v/c の項までだけを残すなら m の加速度は

$$\begin{aligned}c^2\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}=&\nabla\frac{GM}{R_M}\left(1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}_M}{cR_M}\right)+\frac{4GM}{c^2R_M}\left(1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}_M}{cR_M}\right)\boldsymbol{a}\\&+\frac{4GM}{c^2}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{R}_M}{cR_M{}^2}\right)\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{9.40c}$$

である。

$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{a}$ はそれぞれ M の速度と加速度であり，$\boldsymbol{R}_M$ は m から M への動径ベクトルである。(9.40c) は m から M への動径ベクトルの相対的な加速度の方向に依存するところの項を含んでいる。これらは加速度の等方的な効果のおおざっぱに v/c 倍である。

(9.40) の考察から ∇V の項は相対的な回転に関連した遠心力を含み，$(dx^0/ds)^2\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ の項は相対的な速度と相対的加速度による力を表していることを結論できる。$\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A}$ の項はコリオリ加速に導く。回転する殻の場合には $\nabla\times\boldsymbol{A}$ はくるくるまわる荷電球の内側の磁場に類似した内部場を与える。これらの考察はもしマッハの原理が成立しているなら宇宙全体として $GM/c^2R\approx1$ であることを示す。

この取り扱いから，一般相対論にしたがえば，慣性効果は少なくともある程度物体の相互の作用に依存することが示される。このことは，テスト用粒子以

外に何も物体が存在しないときにも慣性効果はやはり現れるからマッハの原理の要求を満足しない。特殊相対論は，もし境界条件が何も課せられないなら一つの極限の場合の解である。常に，慣性は空間の局所的な性質として生じ，(9.40) の右辺のすべての項が変換して消されるような座標を選ぶことができる。(8.13) のような方程式から慣性はスカラー型の静止質量をもった粒子に対する応力テンソルの形の結果としてあいまいさなく等方的† であるだろうことは明白である。これらの理由で Hughes, Robinson および Beltran-Lopez (39)の実験は一般相対論の現在の定式化に対する強い支持を提供し，マッハ原理の強い形式に対しては支持を与えないものと見なされねばならない。

Einstein (11)およびもっと最近には Wheeler が，マッハ原理は場の方程式の帰結ではなく，境界条件である可能性を調べた。もしわれわれが"孤立した"系をもつなら大きい距離では計量は正しく宇宙の残りの計量と一致することを要求すべきである。この境界条件を満たすことは宇宙の中の物体と"孤立した"系

---

† Cocconi と Salpeter (29)(30)は慣性の非等方性のスペクトル線の構造への効果を考察した。結晶中の原子核のガンマ輻射に対して原子の磁場は核エネルギー準位の $(2J+1)$ 個の等間隔に並んだ成分を生ずる。慣性の非等方性 ΔM に対して各成分は量 $(\Delta M/M)TP_2$ だけ動く。ここで T は粒子の平均運動エネルギーであり，P_2 はその値が J に，磁気量子数に，および銀河の中心に向かう方向に相対的な磁場の向きに依存するところの係数である。メスバウアー効果の観測において吸収体と放射体の中の転移の振動数が比較される。相対運動が作り出され計数の割合は放射体と源の相対速度の関数として観測される。選択規則によって移動したスペクトル線による励起が許されると仮定して共鳴は線が重なるときに逐次現れる。観察されるピークの数はゼーマン成分の相対的な間隔が変更されるなら，またもし原子の場が整列されるなら変化するだろう。もし原子の磁場が放射体および吸収体の中ででたらめな方向に並んでいるなら慣性の非等方性がスペクトル線の幅を広くする。一つのメスバウアー効果の実験は否定的な結果(38)を与えた。

慣性の非等方性の優雅なまたずっと敏感なテストが Hughes, Robinson および Beltran-Lopez (39)によって最近遂行された。彼等は LiCl の溶液の中の Li^7 核の核磁気共鳴を12時間以上の期間にわたって観察した。地球の回転はわれわれの銀河系に相対的な装置の向きを変化させる。この方法は，核のポテンシャルの中の $P_{3/2}$ 陽子から生ずる大きな運動エネルギーのために異常に敏感であり，大きな精度をもって核磁気共鳴の振動数の絶対値が測定できる。彼らの否定的な結果から $\Delta M/M<10^{-20}$ が確立される。

の中の質量との相対的な作用を表現するであろう。そういうプログラムを遂行すれば慣性的な性質と宇宙の遠隔的性質の間の関係に導かれるかもしれない。

マッハ原理への異なった見解は Dicke および Sciama(37) によって提出された。

9.4 宇宙論についての注意

一般相対論の方程式は宇宙とその進化を記述できるように見える解をもっている。ずっと以前に Einstein はこの問題を考察し，付加的に“宇宙論的な”項 $\lambda g_{\mu\nu}$ が場の方程式に導入されない限り，その方程式は宇宙に対する静的な解を許さないことを結論した。後に Friedman によって宇宙論的な項を付加しないでも非静的な解が存在することが示された。距離が増すとともにスペクトル線の赤方偏移が増加することが発見されたことは，宇宙は実際に非静的で現在は膨張の位相にあることを暗示している。

正の曲率をもつ宇宙は閉じており，有限で境界はないだろう。これは大変に魅力的なアイディアである。とくに Bondi, Gold および Hoyle が著名であるが他の宇宙論も建設されてきた。われわれは議論を Friedman の解(12)に制限する。

宇宙は空間的に等方的であるとの仮定がなされる。このことは星の密度がすべての方向で同じであるように見えるという観測によって支持される。一つの適切な計量は

$$-ds^2=dl^2-(dx^0)^2 \tag{9.42}$$

$$dl^2=g_{ij}dx^i dx^j=\mathscr{G}^2a^2((dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2) \tag{9.43}$$

である。

対称性の結果として g_{ij} があらゆる時刻で同じ種類の空間依存性をもつことを期待できるから，そこで g_{ij} は x^0 だけの関数 $\mathscr{G}$ と $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=r^2$ の関数aの積であるべきである。ここで座標 x^1, x^2, x^3 および r^2 は次元のない数である。空間の不変な曲率によって g_{ij} を表す表式を必要とする。曲がった空間をもち，与えられた点においてベクトルの対 A^μ と B^ν を導入するものと

考えよう；量 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta$ はスカラーである。もう一つのスカラーは $(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta$ であり，テンソル $g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}$ は $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ と同じ対称性をもつように組み立てられた。

$$K_R=\frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta} \tag{9.44}$$

によって与えられる量 K_R もまたスカラーである。技巧を用いない計算によって A と B が A および B のある一次結合によって置きかえられるとしても不変であることが示される。K_R はリーマンの曲率と呼ばれる。等方的な空間の場合に K_R は A^μ と B^μ の方向にも独立であるだろう。そこで与えられた点において K_R は任意の A^μ と B^μ に対して同じ値をもつ；したがって等方的な空間におけるリーマンテンソルは（9.44）から

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=K_R(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \tag{9.45}$$

として与えられる。3次元空間に対して（9.45）を用いる。成分 R_{1213} は（9.45）および(3.48)の両方で与えられる。（9.45）はその場合に0となる。

$$R_{1213}=-g_{11,23}/2+(3/4)g^{11}[g_{33,2}g_{11,3}]=0 \tag{9.46}$$

と書く。

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}$$

という事実を利用した。いま

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial r}$$

（9.43）と（9.46）は

$$2\left(\frac{da}{dr}\right)^2+\frac{a}{r}\frac{da}{dr}-a\frac{d^2a}{dr^2}=0 \tag{9.47}$$

成分 R_{1331}，R_{1221} および R_{2332} に対する表式は（3.48）と（9.45）を比較することによっても得られる。これは結合され，d^2a/dr^2 の項は（9.47）を用いて消去される。結果は

$$\mathscr{G}^2K_Ra^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dr}\right)^2+\frac{2}{ar}\frac{da}{dr}=0 \tag{9.48}$$

（9.47）と（9.48）は空間の等方性によって課せられるところの a と $\mathscr{G}$ への要

求を表す。

これらの方程式の解は

$$a=\frac{c^1}{c_2+c_3r^2};\qquad K_R=\frac{4c_2c_3}{\mathscr{G}^2{c_1}^2} \tag{9.49}$$

の形をもつ。もし定数が

$$a=\frac{1}{1+\alpha r^2};\qquad K_R=\frac{4\alpha}{\mathscr{G}^2} \tag{9.50}$$

のように選ばれるなら，適切な記述が生まれるだろう。そこで計量は

$$-ds^2=\frac{\mathscr{G}^2}{[1+\alpha r^2]^2}[(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2]-(dx^0)^2 \tag{9.51}$$

$$-ds^2=\frac{\mathscr{G}^2}{[1+\alpha r^2]^2}[dr^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2+r^2d\theta^2]-(dx^0)^2 \tag{9.52}$$

の形をとる。$\mathscr{G}$ は長さの次元をもち，r は次元のない量であることにふたたび注目しよう。“半径” は $\mathscr{R}$ によって与えられ

$$\mathscr{R}=\mathscr{G}\int_0^\infty\frac{dr}{1+\alpha r^2} \tag{9.53}$$

$\alpha>0$ に対して

$$\mathscr{R}=\frac{\pi\mathscr{G}}{2\sqrt{\alpha}} \tag{9.54}$$

(9.54) から α はわれわれの長さの単位に関連した因子であることがわかる。(9.54) を適用するときに $\alpha=1$ となる座標が用いられてよい。曲率スカラー ^3R を計算するために (9.45) を用いると

$$^3R_{ij}=2K_Rg_{ij} \tag{9.55}$$

$$^3R=6K_R=24\alpha\mathscr{G}^{-2} \tag{9.56}$$

が与えられる。

(9.54) と (9.56) から $\alpha=1$ の場合に正の曲率をもった有限な境界のない宇宙であることがわかる。$\alpha=0$ のときは“ユークリッド的”な開いた空間となり，負の α の場合には負の曲率をもつ曲がった開いた空間となる。応力エネルギーテンソルはよい近似でただ一つの成分 $T_{00}=\rho_Mc^2$ のみをもち，すべての他の成分は0になると仮定される。場の方程式はそのとき

$$R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R=3\left(4\alpha+\left(\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}\right)^2\right)\frac{1}{\mathscr{G}^2}=\frac{8\pi G\rho_M}{c^2} \tag{9.57}$$

$$R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R=\left(4\alpha+\left(\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}\right)^2+2\mathscr{G}\frac{d^2\mathscr{G}}{(dx^0)^2}\right)\mathscr{G}^{-2}=0 \tag{9.58}$$

および $R_{22}-\frac{1}{2}g_{22}R$ と $R_{33}-\frac{1}{2}g_{33}R$ に対する同様な表式である。

これらの方程式のひき算から

$$\frac{d^2\mathscr{G}}{(dx^0)^2}+\frac{4\pi\mathscr{G}\rho_M G}{3c^2}=0 \tag{9.59}$$

という結果になる。

ρ_M と $\mathscr{G}$ の両方が正であるから (9.59) は $\mathscr{G}$ が極小をもちえず，また変曲点を持ちえず，時間とは独立でもありえないことを示している。"ユークリッド的" な空間では $\alpha=0$ で，(9.57) は

$$\left(\frac{1}{\mathscr{G}}\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}\right)^2=\frac{8\pi G\rho_M}{3c^2} \tag{9.60}$$

を与える。

$\alpha\neq0$ の場合には (9.58) と (9.59) は

$$\left(\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}\right)^2=\frac{8\pi\mathscr{G}^2\rho_M G}{3c^2}-4\alpha \tag{9.61}$$

を与える。

(9.58) は圧力が 0 であると仮定した。任意の時刻における全質量 M は

$$M=\rho_M\int_0^\infty\left(\frac{\mathscr{G}}{1+\alpha r^2}\right)^3 r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi \tag{9.62}$$

によって表される。

もし全質量が保存するなら $\mathscr{G}^3\rho_M$ は時間と独立である。そこで $8\pi G\mathscr{G}^3\rho_M/3c^2=\mathscr{G}_0$ と置いてよく，ここに $\mathscr{G}_0$ は正の定数であるが

$$\left(\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}\right)^2=\frac{\mathscr{G}_0-4\alpha\mathscr{G}}{\mathscr{G}} \tag{9.63}$$

が得られる。$\alpha=+1$ に対して 9.2 図に示されるように $\mathscr{G}$ の時間依存性をもった閉じた宇宙をもつ。もし $\alpha=-1$ なら $\mathscr{G}$ は単調に増加する。

もっとも魅力的な可能性，$\alpha=+1$，式 (9.60) および (9.61) を用いること

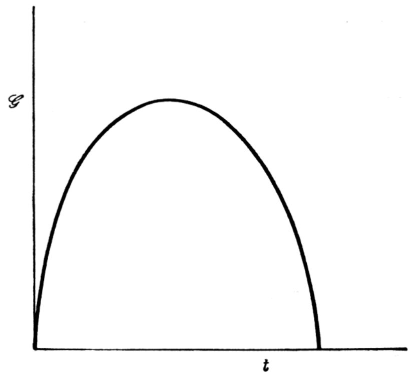


図　9.2

によってテストされうる。

$$\frac{1}{\mathscr{G}}\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}$$

は膨張率に関する天文学的なデータから計算することができて，ρ_M もまた観測から評価してよい。もし

$$\left(\frac{1}{\mathscr{G}}\frac{d\mathscr{G}}{dx^0}\right)^2<\frac{8\pi G\rho_M}{3c^2}$$

ならばαに対して正の値が許される。現在の観測天文学のデータは正のαを与えるためには，ρ_M の値が小さすぎる。Wheeler と Ivanenko は両方とも，閉じた正に曲がった宇宙のアイディアを ρ_M についてのわれわれの知識が十分にそれを除外するだけの精度があると確信する以前に捨ててしまうべきではないと注意している。現在は知られていない他のエネルギーの源が，可視光だけを用いる観測によって示される値よりはかなり大きい物体エネルギー密度の値を与えるかもしれない。

9.5　ハミルトニアン定式化 ((14)—(17)，(19)—(22)，(26))

これまで提出されてきた理論はラグランジュアン形式である。関数 (6.5) と (6.10) は場の方程式に導くことが示され，(6.10) によってラグランジュ方程式 (6.14) を書くことが許された。

量子論ではハミルトニアン形式はもっとも成功して用いられてきた形式である。力学ではラグランジュアン L は座標 q_i と速度 $\dot{q}_i$ の関数である。ハミルトニアンは座標と運動量の関数で

$$H = p_i\dot{q}_i - L \tag{9.64}$$

として定義される。運動量 p_i は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{9.65}$$

によって与えられる。運動方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i; \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \tag{9.66}$$

である。何か他の力学変数たとえば b に対して

$$\dot{b} = \frac{\partial b}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial b}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = [b, H] \tag{9.67}$$

(9.67) の中で $[b, H]$ はポアッソンかっこで

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}$$

によって定義される。

この“正準”形式が適用されうるためには p や q は次の意味で独立変数でなければならない。束縛条件すわち先験的な関係式はそれらを関係づけるために存在するべきではない†。何種類かの束縛条件が一般相対論において存在することをみた。方程式 (7.96) はそれらのいくつかを場の初期値によって，した

---

† そういう要求は，ラグランジュアン形式において，$\ddot{q}_i$ に対して q_j と $\dot{q}_j$ を用いて解くことができることに対応する。ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

は

$$\ddot{q}_i\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

の形に書かれてよい。後者の方程式の集合は $\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j$ をもつ行列式が 0 にならないときのみ $\ddot{q}_i$ について解くことができる。もしそれが 0 になるならここに与えられたものに本質的に同等な手続きが用いられねばならない。

がって，その後のすべての時刻において満たされねばならない方程式の集合として表現する。束縛条件という術語は理論においてあるあいまいさが存在するという事実——たとえば電気力学におけるゲージ群あるいは共変性のある様相——を表現するためにも用いられる。ここでは Dirac (16)(22) の議論に非常に近くしたがおう。

ハミルトニアン形式が考えられるときに，束縛条件は運動量が (9.65) によって定義されるや否や現れるだろう。p は $\dot{q}$ の独立な関数でないことが見いだされるかもしれない。(9.65) の結果として生ずる多数の独立な関係式が存在し，それを

$$\varphi_m(p, q)=0 \tag{9.68}$$

と書くと考えよう。Dirac は束縛条件を表すすべての方程式および束縛条件の帰結として成り立つ方程式を弱方程式と呼びそれらを $f_m(p, q)\approx 0$ と書く。

“ラグランジュ” 未定係数法が用いられるだろう。作用原理 $\delta I=0$ が運動方程式を得るために書かれるときに，第一に

$$\delta I=\int \delta L dt=\int\left[\delta p_i \dot{q}_i+p_i \delta \dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i-\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i\right] dt \tag{9.69}$$

が得られる。いまラグランジュの未定係数を u_m としよう。

$$-u_m \delta \varphi_m=-u_m\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} \delta q_i+\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i} \delta p_i\right] \tag{9.70}$$

を (9.69) の被積分関数に加え，それからその結果を0に等しいと置く。端の点で0になる変分に対して，運動方程式

$$\begin{aligned} \dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}+u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}-u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{9.71}$$

が出てくる。u_m は p と q の関数である。任意の力学変数，たとえば A の時間微係数は†

$$\dot{A}=\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i+\frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i=[A, H]+u_m[A, \varphi_m] \tag{9.72}$$

---

† 束縛条件式はポアッソンかっこの計算ではどこでも用いられてはならない；すなわち p と q はこの場合に独立と考えられる。

によって与えられる。

関数 φ_m のいくつかは問題の中の真の任意性を表している。これらに対しては任意関数の異なった選択が同じ物理に相当する。そういう“束縛条件”を Diracは第一種と呼び，それらを選び出すための系統的な手続きを用意する。他の形の束縛条件は，たとえば許された初期値への真の拘束を表すだろう。そうしてこれらもまた Dirac の手続きによって正しく考慮される。φ_m はすべての時刻で0になるから（9.72）から（$A=\varphi_{m'}$ として）

$$[\varphi_{m'}, H]+u_m[\varphi_{m'}, \varphi_m]=0 \tag{9.73}$$

ということが出てくる。もし(9.73)が u_m に対して解くことができるなら，またもし方程式（9.73）が p_i 等と q_i 等の間に

$$\chi_m(q, p)\approx 0 \tag{9.74}$$

のような付加的な関係式を与えないなら，問題は終わりである。ふたたび

$$[\chi_k, H]+u_m[\chi_k, \varphi_m]=0 \tag{9.75}$$

と書くことができる。これらの表式は u_m に対して解くために用いられることができて

$$u_m=U_m(q, p) \tag{9.76}$$

を得る。

（9.73）と（9.75）を調べると

$$V_m[\varphi_{m'}, \varphi_m]\approx 0; \qquad V_m[\chi_k, \varphi_m]\approx 0 \tag{9.77}$$

の任意の解を（9.76）に加えてよいことが示される。そこで一般解は

$$u_m=U_m+v_aV_{am} \tag{9.78}$$

となる。V_{am} は（9.77）の独立な解の集合である。

ここで v_a は任意の係数で，時間の関数である。(9.78）を使うことにより，v_a を変数として導入し u_m を消去してよい。これらに独立な p_i と q_i を加えたものは p および q 変数のはじめの数より小さいかもしれない。(9.78）と（9.72)は運動の一般方程式として

$$\dot{A}=[A, H']+v_a[A, \varphi_a] \tag{9.79}$$

ただし

$$H'=H+U_m\varphi_m;\qquad \varphi_a=V_{am}\varphi_m \tag{9.80}$$

を与える。

ある束縛条件は，もしハミルトニアンとすべての χ_k と φ_m とのポアッソンかっこが0となるなら，形式的に第一種であると呼ばれる。それ以外の束縛条件は第二種という。他の著者達は φ_m の方程式を一次の束縛条件，χ_k の方程式を二次の束縛条件と呼んだことがある。

(9.73) は φ_a と H' とのポアッソンかっこが0になることを示している。また

$$[H',H]\approx U_{m'}[\varphi_{m'},H]\approx 0 \tag{9.81}$$

(9.81)は(9.73) に $U_{m'}$ を乗じた後に，(9.77) と (9.78) の結果として0になることがわかる。また (9.73)，(9.75) および (9.78) は H' と χ_k および φ_m とのポアッソンかっこが0になることを示している。H' はしたがって第一種である。φ_a と φ_m および χ_k とのポアッソンかっこは (9.77) の結果として0になる。φ_a と H とのポアッソンかっこはその H' とのポアッソンかっこが0となることのために0になる。φ_a はしたがって第一種である。

方程式 (9.79) は第一種の関数 H' と φ_a から作り上げられていることがわかる。v_a は任意であり，運動方程式によって拘束されない。一般解の中の時間の任意の関数 v_a の数は独立な第一種の φ の数であることがわかる。Diracはどんな任意関数が一般解の中にあるかを作用関数の不変性の結果として，実際上知ることができることを注意している。このことはポアッソンかっこを計算することなしに第一種関数を同定することを許してくれる。後でわかるようにハミルトニアンが知られる前にこのことを行う必要があるかもしれない。

ある場に対して全空間が細胞に分割されると想像してよい。(9.65) はやはり成り立つが，しかし $\dot{q}_i$ は体積 $\Delta\tau$ の特別な細胞の中でのみ変化する。ハミルトニアンは

$$H=\sum_{\text{細胞}}\left(\frac{\partial L_F}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L_F\right)\Delta\tau \tag{9.64A}$$

である。運動量密度 π_i は

$$\pi_i = \frac{\partial L_F}{\partial \dot{q}_i} \tag{9.65A}$$

によって与えられる。（i はすべての変数で加えられるとして）

$$H = \int (\pi_i \dot{q}_i - L_F) d^3x \tag{9.64B}$$

と書き，ハミルトニアン密度 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} = \pi_i \dot{q}_i - L_F \tag{9.64C}$$

によって導入してよい。(9.64B) から，（j は1から3まで加えられるとし）

$$\begin{aligned}\delta H &= \int\left(\pi_i \delta\dot{q}_i + \dot{q}_i \delta\pi_i - \frac{\partial L_F}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L_F}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i - \frac{\partial L_F}{\partial q_{i,j}}\delta q_{i,j}\right) d^3x \\ &= \int\left(\dot{q}_i \delta\pi_i - \frac{\partial L_F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial L_F}{\partial q_{i,j}}\delta q_i\right) d^3x \end{aligned} \tag{9.64D}$$

を得る。(9.64D) の一番右端では表面積分を除いた。場の方程式 (4.8) を用いると (9.64D) は

$$\delta H = \int (\dot{q}_i \delta\pi_i - \dot{\pi}_i \delta q_i) d^3x \tag{9.64E}$$

に帰着する。

(9.64E) から $\mathscr{H}$ は q_i と π_i の関数であることは明らかであり，そこで

$$\begin{aligned}\delta H &= \int\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_{i,j}}\delta q_{i,j} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_i}\delta \pi_i + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_{i,j}}\delta \pi_{i,j}\right) d^3x \\ &= \int\left[\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_{i,j}}\right)\delta q_i + \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_{i,j}}\right)\delta \pi_i\right] d^3x \end{aligned} \tag{9.64F}$$

ふたたび表面積分は (9.64F) の一番右辺で無視された。(9.64E) と (9.64F) の中の $\delta q_i, \delta\pi_i$ の係数を比較すると場の方程式

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_{i,j}} \\ \dot{\pi}_i &= -\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_{i,j}}\right)\end{aligned} \tag{9.66A}$$

に導かれる。

密度 $\mathscr{E}$ の3次元の体積積分として与えられるある量 E の時間微係数を得る

ために

$$\dot{E}=\int\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_{i,j}}\dot{q}_{i,j}+\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\pi_i}\dot{\pi}_i+\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\pi_{i,j}}\dot{\pi}_{i,j}\right)d^3x \qquad (9.67\text{A})$$

と書く。もし$\mathscr{E}$と$\mathscr{H}$がq_iとπ_iの高次微係数に依存するならこれらもまた(9.67A), (9.64F) および (9.66A) の中に含まれねばならないだろう。表面積分の項を落として，(9.67A) の中に (9.66A) を利用すると

$$\begin{aligned}\dot{E}=&\iint\left[\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_{i,j}}\right)\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_{i,j}}\right)\right.\\&\left.-\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\pi_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\pi_{i,j}}\right)\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_{i,j}}\right)\right]d^3x \qquad (9.67\text{B})\\=&[E,H]=\iint\left[\frac{\delta E}{\delta q_i}\frac{\delta H}{\delta\pi_i}-\frac{\delta E}{\delta\pi_i}\frac{\delta H}{\delta q_i}\right]d^3x\end{aligned}$$

を得る。この表式が場に対するポアッソンかっこを定義する。一番右端の汎関数係数の記号はある著者によって用いられている。もしEが体積で積分された密度として利用できるのでないなら，それは単にデルタ関数を用いることによって容易にそれに変えることができる。

もしq_iとπ_iを関係づける束縛条件が存在するなら，(9.71) を導き出したときのように進むことができる。結果は

$$u_m\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\pi_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi_m}{\partial\pi_{i,j}}\right)$$

の項が$\dot{q}_i$に対する表式の右辺に加えられ

$$-u_m\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_{i,j}}\right)$$

の項が (9.69A) の中で$\dot{\pi}_i$に対する表式の右辺に加えられることである。運動方程式 (9.67B) は

$$\begin{aligned}\dot{E}=&\iint\left[\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_{i,j}}\right)\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_{i,j}}\right.\right.\\&\left.+u_m\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial\pi_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi_m}{\partial\pi_{i,j}}\right]\right)\\&-\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\pi_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\pi_{i,j}}\right)\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_{i,j}}\right.\end{aligned}$$

$$+u_m\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi_m}{\partial q_{i,j}}\right]\Bigg)\Bigg]d^3x \tag{9.97C}$$

となり，(9.79) に相当する結果は

$$\dot{E}=[E,H']+\int\dot{q}_a[E,\varphi_a]d^3x \tag{9.79A}$$

である。

一般相対論において場の変数は，任意の与えられた時間における3次元空間の幾何を記述するために必要とされるものである。場の歴史はそのとき曲がった3次元空間の連続である。それゆえにただ6個の g_{ij} とそれらの正準運動量を，要求された変数としてもって完結するような正準形式を探し求めるのが合理的である。

いま重力のラグランジュアン密度† を考えよう。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_G\sqrt{-g}&=g^{\mu\nu}(\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}-\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma})\sqrt{-g}\\&=(1/4)g_{\mu\nu,\rho}g_{\alpha\beta,\sigma}\{(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})g^{\rho\sigma}\\&\quad+2(g^{\mu\alpha}g^{\beta\rho}-g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta})g^{\nu\sigma}\}\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{9.82}$$

ラグランジュアンは $\int\mathscr{L}_G[\sqrt{-g}]d^3x$ である。場の変数は $g_{\mu\nu}$ であり，$g_{\mu\nu,0}$ が速度である。$g_{\mu\nu,i}$ は $g_{\mu\nu}$ のみの関数で $g_{\mu\nu,0}$ とは独立である。$g_{\mu\nu}$ に正準共役な運動量 $\pi^{\mu\nu}$ は

$$\int\delta\mathscr{L}_G[\sqrt{-g}]d^3x=\int\pi^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu,0}d^3x \tag{9.83}$$

という関係によって定義される。

$\mathscr{L}_G\sqrt{-g}$ を調べてみると $g_{\rho0,0}$ について2次であるような項は含まないことが示される。そこで $\pi^{\mu0}$ は $g_{\alpha\nu}$ と $g_{\alpha\nu,i}$ の関数となるだろうことが結論され，それを f^μ と記す。

$$\pi^{\mu0}\approx f^\mu(g_{\alpha\nu},g_{\alpha\nu,i}) \tag{9.84}$$

関数 f^μ が束縛条件の関係式である。いま運動方程式は決して $g_{\rho0,0}$ を拘束せず，束縛条件 (9.84) はそこで“第一種”であることを示すことができる。

---

† この節では $16\pi G/c^4=1$ となる単位を用いている。

もし無限小座標変換

$$x^\mu \to x^\mu + b^\mu$$

が遂行されるなら

$$g_{\mu\nu}(x) - g'_{\mu\nu}(x') = \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} b^\rho{}_{,\nu} + g_{\nu\rho} b^\rho{}_{,\mu} \tag{9.85}$$

$\beta^\rho(x^i)$ を任意関数として，$b^\rho = \dfrac{1}{2}(x^0 - c)^2 \beta^\rho(x^i)$ と置こう。そのとき超平面 $x^0 = c$ の上で

$$\delta g_{\mu\nu} = 0; \qquad \delta g_{\mu\nu,0} = (g_{\mu\rho}\delta_\nu{}^0 + g_{\nu\rho}\delta_\mu{}^0)\beta^\rho$$

$$\delta g_{ij,0} = 0; \qquad \delta g_{\mu 0,0} = \beta_\mu + \delta_\mu{}^0 \beta_0$$

となる。β は任意であるから $g_{\mu 0,0}$ における任意の変化は $g_{\mu\nu}$ あるいは $g_{ij,0}$ には影響しないことが出てくる。

（V. Bargmann の注意に従って） 4次元の多様体のある変数は，空間的な曲面上の座標には影響しないところの座標変換に対して，与えられた空間的曲面の上でそれらの値を変化させないだろうことに注目すると便利である。そういう変数は固有な（intrinsic）変数と呼ばれる。もっと正確には，もし座標変換

$$x'^\mu = F^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

が遂行され，F^μ が条件

$$F^0(c, x^1, x^2, x^3) = c'$$

$$F^i(c, x^1, x^2, x^3) = x^i$$

を満たすなら，固有な変数はそれらの値を変化させない。それゆえに g_{ij} は固有である。g_{00} と g_{0i} は固有でなく，F^0 の選択あるいは特別な座標によって勝手に変化させられてよい。

固有な場の変数が一般相対論のハミルトニアンによる定式化に中心的役割を果たすだろうことを期待できる。

ここで用いられるべきポアッソンかっこの関係式は（9.67B）である。

$$[g'_{\alpha\beta}, \pi^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\delta_\alpha{}^\mu \delta_\beta{}^\nu + \delta_\beta{}^\mu \delta_\alpha{}^\nu)\delta_3(x' - x)$$

$g'_{\alpha\beta}$ は $x^0 = c, x'^1, x'^2, x'^3$ における $g_{\alpha\beta}$ の値である。

Dirac は，$\mathscr{L}_G$ を調べると運動方程式に影響を与えることなしに

$f^{\alpha}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,i})$ を0にするように修正されうることが示されることに注意している。このことは表式

$$\Delta\mathscr{L}_G\sqrt{-g}=\{(\sqrt{-g}\,g^{00})_{,0}g^{i0}/g^{00}\}_{,i}-\{(\sqrt{-g}\,g^{00})_{,i}g^{i0}/g^{00}\}_{0} \tag{9.86}$$

を $\mathscr{L}_G\sqrt{-g}$ に加えることによってなされる。$\int\Delta\mathscr{L}_G\sqrt{-g}d^4x$ は表面積分として書くことができるから，運動方程式には影響しないだろう。新しいラグランジュアン密度関数 $\mathscr{L}_G{}^*\sqrt{-g}$ はいくぶん退屈な演算をした後で

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_G{}^*\sqrt{-g}=\frac{1}{4}[&(e^{ra}e^{sb}-e^{rs}e^{ab})(-4\Gamma^0{}_{rs}\Gamma^0{}_{ab}\\&+\{g_{rs,u}g^{u0}-(g_{r\alpha,s}+g_{s\alpha,r})g^{\alpha 0}\}\{g_{ab,v}g^{v0}-(g_{a\beta,b}+g_{b\beta,a})g^{\beta 0}\})/g^{00}\\&+g_{\mu\nu,i}g_{\alpha\beta,j}\{(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})g^{ij}+2(g^{\mu\alpha}g^{\beta i}-g^{\mu i}g^{\alpha\beta})g^{\nu j}\}]\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{9.87}$$

として得られる。ただし

$$e^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}-g^{\mu 0}g^{\nu 0}/g^{00} \tag{9.88}$$

$\mathscr{L}$ の代わりに $\mathscr{L}^*$ について (9.83) の目録に入れられた演算を遂行すると

$$\delta\mathscr{L}_G{}^*\sqrt{-g}=(e^{ra}e^{sb}-e^{rs}e^{ab})\Gamma^0{}_{ab}\delta g_{rs,0}(\sqrt{-g}) \tag{9.89}$$

が与えられる。そこで運動量 π^{rs} は

$$\pi^{rs}=(e^{ra}e^{sb}-e^{rs}e^{ab})\Gamma^0{}_{ab}\sqrt{-g} \tag{9.90}$$

であり，それは

$$\Gamma^0{}_{ab}\sqrt{-g}=\left(g_{ra}g_{sb}-\frac{1}{2}g_{rs}g_{ab}\right)\pi^{rs} \tag{9.91}$$

とも書くことができる。

超平面 $x^0=c$ と，ある固有の場の変数 η をもち，η は g_{rs} および存在するかもしれない重力以外の場に対する場の変数に依存するようなものであると考えてみよう。a_μ は小さく x^i だけの関数だとして各点 x^μ が $x^\mu+a^\mu$ となるように面 $x^0=c$ を変位させよう。

$$\delta\eta=\int\xi_\mu a^\mu d^3x \tag{9.92}$$

ただし ξ_μ は x^i の関数である：

$$\frac{\partial\eta}{\partial x^0}=\int\xi_0 d^3x \tag{9.93}$$

l^μ は $x^0=c$ に垂直で単位の長さをもつとしよう。

$$l_i=l^\mu g_{\mu i}=0; \qquad l^\mu l_\mu=-1 \tag{9.94}$$

この要求に合致する l^μ は対する表式は

$$l^\mu=g^{\mu 0}(-g^{00})^{-\frac{1}{2}} \tag{9.95}$$

である。ξ_L は関係式

$$-\xi_L=l^\mu\xi_\mu=g^{\mu 0}(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}\xi_\mu \tag{9.96}$$

$$\xi_0=(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}\xi_L-g^{i0}\xi_i/g^{00} \tag{9.97}$$

によって定義されるものとしよう。(9.88) を思い出すと

$$e^{rs}g_{s\alpha}=e^{r\mu}g_{\mu\alpha}=\delta_\alpha{}^r-g^{r0}\delta_\alpha{}^0/g^{00} \tag{9.98}$$

$$e^{rs}g_{sa}=\delta_a{}^r \tag{9.99}$$

$$e^{rs}g_{s0}=-g^{r0}/g^{00} \tag{9.100}$$

と書くことができる。これらの関係式を用いると (9.97) は

$$\xi_0=(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}\xi_L+g_{r0}e^{rs}\xi_s \tag{9.101}$$

となり，(9.93) は

$$\frac{\partial\eta}{\partial x^0}=\int[(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}\xi_L+g_{r0}e^{rs}\xi_s]d^3x \tag{9.102}$$

となる。

$\partial\eta/\partial x^0=[\eta, H]$ を得たいが，これはハミルトニアンとして

$$H=\int[(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}\mathscr{H}_L+g_{r0}e^{rs}\mathscr{H}_s]d^3x \tag{9.103}$$

を書き

$$[\eta,\mathscr{H}_L]=\xi_L; \qquad [\eta, e^{rs}\mathscr{H}_s]=e^{rs}\xi_s$$

と仮定することにより成就される。$\mathscr{H}_L$ と $\mathscr{H}_s$ は物質と重力部分の両方をもち固有の変数のみに依存するだろう。ハミルトニアンの標準的定義は重力の場合に H_G と記され

$$H_G=\int(\pi^{rs}g_{rs,0}-\mathscr{L}_G{}^*\sqrt{-g})d^3x \tag{9.104}$$

を与えられ，(9.87) と (9.90) を用いるとこれは

$$H_G=\int \pi^{rs}(g_{rs,0}+\Gamma^0{}_{rs}/g^{00})d^3x+\frac{1}{4}\int[-g]^{\frac{1}{2}}[(e^{rs}e^{ab}-e^{ra}e^{sb})\cdot$$
$$\{g_{rs,u}g^{u0}-(g_{ra,s}+g_{sa,r})g^{a0}\}\{g^{v0}g_{ab,v}-(g_{a\beta,b}+g_{b\beta,a})g^{\beta 0}\}/g^{00}$$
$$-g_{\mu\nu,i}g_{\alpha\beta,j}\{(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})g^{ij}-2(g^{\mu i}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\beta i})g^{\nu j}\}]d^3x \tag{9.105}$$

と表される。(9.91)，(3.29) および (9.100) を用いると (9.105) の右辺の第1積分は

$$\int\pi^{rs}(g_{rs,0}+\Gamma^0{}_{rs}/g^{00})d^3x=\int\Bigl\{(-g^{00})^{-1}(-g)^{-\frac{1}{2}}\Bigl(g_{ra}g_{sb}-\frac{1}{2}g_{rs}g_{ab}\Bigr)\pi^{rs}\pi^{ab}$$
$$+g_{u0}e^{uv}[\pi^{rs}g_{rs,v}-2(\pi^{rs}g_{rv})_{,s}]\Bigr\}d^3x \tag{9.106}$$

と書かれる。

Dirac は速度を消去して (9.105) の残りを正準形 (9.103) に帰着させる手続きを与える。(9.105) の第2の被積分関数を調べると，g_{rs}, $g_{rs,j}$ の関数にすぎない $\mathscr{H}_s$ について $g_{r0}e^{rs}\mathscr{H}_s$ の形式の項はそこに生ずることができないことが示される。そこで $(-g^{00})^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}_L$ への寄与だけを計算する必要がある。$\mathscr{H}_L$ もまた固有変数 g_{rs}, $g_{rs,j}$ だけに依存するからそれは $g_{i0}=0$ と仮定して計算されうる。行列式 g は $gg^{00}={}^3g$ として，g_{rs} の行列式 ${}^3g$ を用いて書くことができる。表面積分を除外した後で結果は

$$H=\int\Bigl[(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}\Bigl\{({}^3g)^{-\frac{1}{2}}\Bigl(g_{ra}g_{sb}-\frac{1}{2}g_{rs}g_{ab}\Bigr)\pi^{rs}\pi^{ab}$$
$$+\frac{1}{4}({}^3g)^{\frac{1}{2}}g_{rs,u}g_{ab,v}\{(e^{ra}e^{sb}-e^{rs}e^{ab})e^{uv}+2(e^{ru}e^{ab}-e^{ra}e^{bu})e^{sv}\}$$
$$+\{({}^3g)^{\frac{1}{2}}g_{rs,u}(e^{rs}e^{uv}-e^{ru}e^{sv})\}_{,v}+\mathscr{H}_{ML}\Bigr\}$$
$$+g_{m0}e^{mv}[\pi^{rs}g_{rs,v}-2(\pi^{rs}g_{rv})_{,s}+\mathscr{H}_{Mv}]\Bigr]d^3x \tag{9.107}$$

である。ただし $\mathscr{H}_{ML}$ と $\mathscr{H}_{Mv}$ は (9.103) の $\mathscr{H}_L$ と $\mathscr{H}_s$ 部分に対応する物質のハミルトニアンの部分を表す。それゆえに，(9.84) が 0 になるように整え

た $\mathscr{L}_G$ の修正の結果として $\pi^{\mu 0}$ が0になるから，残された g_{ij} に相当する6個の自由度だけが存在する。また関係式（9.103）プラス
$[\pi^{\mu 0}, H]=0$ という要請から $\mathscr{H}_L$ と $\mathscr{H}_s$ が束縛条件の結果として 0 になることが導かれる。

弱場近似では，$(h_{\mu\nu})^2$ の項までを含むハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H=&\iint\Big[\pi^{rs}\pi^{rs}-\frac{1}{2}\pi^{rr}\pi^{ss}+\frac{1}{4}g_{rs,u}g_{rs,u}-\frac{1}{4}g_{rr,u}g_{ss,u}\\
&+\frac{1}{2}g_{rs,r}g_{uu,s}-\frac{1}{2}g_{rs,u}g_{ru,s}+\mathscr{H}_{ML}\Big]d^3x\\
&-\int([-g_{00}]^{-\frac{1}{2}}-1)(g_{rs,rs}-g_{rr,ss}-\mathscr{H}_{ML})d^3x\\
&-\int g_{r0}(2\pi^{rs}{}_{,s}-\mathscr{H}_{Mr})d^3x
\end{aligned}
\tag{9.107a}
$$

によって与えられる。静止質量 m をもつ粒子に対して作用は

$$
I=-m\int ds=-m\int\left(-g_{\mu\nu}\frac{dy^\mu}{dT}\frac{dy^\nu}{dT}\right)^{\frac{1}{2}}dT
$$

である。そこで y^μ は粒子の座標である。

$$
L_p=-m\left(-g_{\mu\nu}\frac{dy^\mu}{dT}\frac{dy^\nu}{dT}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$dy^0/dT=1$ でそれは力学変数ではない。運動量 P_r は

$$
P_r=mg_{\mu r}\frac{dy^\mu}{dT}\left(-g_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{dT}\frac{dy^\beta}{dT}\right)^{-\frac{1}{2}}
$$

によって与えられる。粒子はハミルトニアンに次の項として寄与する。

$$
H_M=P_r\dot{y}^r-L_M
$$

これは

$$
H_M=-g_{s0}e^{rs}P_r+(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}(m^2+e^{rs}P_rP_s)^{\frac{1}{2}}
$$

の形に書かれてよい。（9.103）から

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}_{ML}&=(m^2+e^{rs}P_rP_s)^{\frac{1}{2}}\delta_3(x-y)\\
\mathscr{H}_{Mr}&=-P_r\delta_3(x-y)
\end{aligned}
$$

ということが出てくる。

一般相対論のハミルトニアンによる定式化への異なった接近の仕方は，Arnowitt, Deser および Misner によって与えられた。彼らの結果は次の通りである†。

束縛条件なしの二対の共役変数だけを含む一般相対論に対する正準形式が得られている。1次形式で表わされた作用積分

$$I=\int[-g]^{\frac{1}{2}}Rd^4x$$

は

$$(-g)^{\frac{1}{2}}R=-g_{ij}\pi^{ij}{}_{,0}+(-{}^3g\,g^{00})^{-\frac{1}{2}}\left({}^3g\,{}^3R+\frac{1}{2}\pi^2-\pi^{ij}\pi_{ij}\right)$$
$$+2g_{0i}\pi^{ij}{}_{|j}-2\left\{({}^3g)^{\frac{1}{2}}([-g^{00}]^{-\frac{1}{2}})_{,i}+\left(\pi_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}\pi\right)g_{0m}e^{mj}\right\}^{|i} \tag{9.108}$$

である。ここで

$$\pi^{ij}=(-g)^{\frac{1}{2}}[\Gamma^0{}_{lm}-g_{lm}\Gamma^0{}_{pq}e^{pq}]e^{li}e^{mj}$$

e^{ij} は g_{ij} の逆行列であり，${}^3R$ は g_{ij} だけから作られ，π は $\pi_i{}^j$ のトレースで，バーの記号は g_{ij} 計量に関しての共変微係数に対して用いられる。この作用積分の変分によって Palatini の形式におけるすべての通常の Einstein の場の方程式が導かれる。端点の変分によって生成子 (generator)

$$G=\int[-g_{ij}\delta\pi^{ij}+T^0{}_{\mu}{}'\delta x^{\mu}]d^3x$$

が得られ，そこで（式 (9.108) を $(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}$ および g_{0i} に関して変分することから得られる）束縛条件 $G_0{}^{\mu}=R_0{}^{\mu}-\frac{1}{2}\delta_0{}^{\mu}R=0$ の結果として，応力テンソル項 $\int d^3xT^0{}_{\mu}{}'\delta x^{\mu}$ が 0 となる。

---

† 小さい修正をしたがこの節は本質的に Arnowitt, Deser および Misner による *Nnovo Cimento* への letter to the editor[28] の再録である。著者と *Nuovo Cimento* の許可を得て再録された。

いま g_{ij} と π^{ij} を一般形式

$$f_{ij}=f_{ij}{}^{TT}+\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}f^{T}-\frac{1}{\nabla^{2}}f^{T}{}_{,ij}\right)+f_{i,j}+f_{j,i} \tag{9.109}$$

に従って直交分解を利用しよう。この中で $1/\nabla^2$ は平垣な空間でのラプラス演算子の逆であり，適当な束縛条件

$$f^{T}=f_{ij}-\left(\frac{1}{\nabla^{2}}\right)f_{ij,ij} \tag{9.109a}$$

$$f_{i}=\frac{1}{\nabla^{2}}\left[f_{ij,j}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nabla^{2}}\right)f_{kj,kji}\right] \tag{9.109b}$$

を満たし，f_{ij} の横波のトレースが0の部分 $f_{ij}{}^{TT}$ は残りを表す。

$$f_{ij}{}^{TT}{}_{,j}=0; \qquad f_{ii}{}^{TT}\equiv 0$$

そういう分解は一組の座標条件が課せられるときにのみ意味深い。次のものが選ばれる：

$$g_{ij,j}=0; \qquad \pi^{ii}{}_{,jj}-\pi^{ij}{}_{,ij}=0 \tag{9.110}$$

これらの座標条件を課することは座標の代わりに独立変数として計量のある不変汎関数を用いることと同等である† から一般的共変性は保持される。条件(9.110) は汎関数††

$$t=-\left(\frac{1}{2\nabla^{2}}\right)\pi^{T}; \qquad x^{i}=g_{i} \tag{9.111}$$

が選ばれることを意味する。これらが近似的に平坦な計量であることを保証する。

直交分解を生成子に代入すると，ある部分積分の後に

---

† それゆえに，よく知られていることであるが，見かけ上非共変的な De Donder の条件 $([\sqrt{-g}]g^{\mu\nu})_{,\nu}=0$ は4個の一次独立なスカラー関数 h^{α} が，$h^{\alpha}{}_{;\mu}{}^{;\mu}=0$ であるとき，座標 x^{α} として用いられるべきであるとの共変的な命題と同等である。そういう座標条件と共変的命題の間の同等性はこの場合に成り立ち，始めの座標系の x^{μ} に依存しないところの座標の任意の他の選択に対して実際に成立する。

†† 適当な境界条件が勿論 (9.110) と (9.111) を関連させるために演算子 $(1/\nabla^2)$ の上に課せられた。この演算子を明白に特異性のないものとする簡単な手続きは (9.111) を $te^{-\alpha r}=-(1/2\nabla^2)\pi^T$，$x^ie^{-\alpha r}=g_i$ と書き直し，続いて分析の最後に極限 $\alpha\to 0$ を取ることから成り立つ。

$$G=\int\left\{\pi^{ijTT}\delta g_{ij}{}^{TT}+g^T{}_{,ii}\delta\left[\left(-\frac{1}{2\nabla^2}\right)\pi^T\right]-2\pi^{ij}{}_{,j}\delta g_i\right\}d^3x \tag{9.112}$$

ということが見いだされる。作用積分の中の変分 δ および時間微係数の両方が分解と可換であるからである。ここで $g^T{}_{,ii}$ および $\pi^{ij}{}_{,j}$ は $g_{ij}{}^{TT}$ および π^{ijTT} を用いてそれらに対する4個の束縛方程式† $G_\mu{}^0=0$ を解くことによって表されうる。そこで場の理論に特徴的な付加的な運動量の項 $T_i{}^0$ をもった標準的な正準形式 $G=p\delta q-H\delta t$ の形に生成元(9.112)がなっていることがわかる:

$$G=\int[\pi^{ijTT}\delta g_{ij}{}^{TT}-\mathscr{H}\delta t+T_i{}^0\delta x^i]d^3x \tag{9.112a}$$

x^i と t は g_{ij} および π^{ij} に対する表式の中にあらわには現れないから，それらは方程式 $G_\mu{}^0=0$ の中にあらわに現れない。詳細な計算をするとそれらは $g^T{}_{,ii}$ および $\pi^{ij}{}_{,j}$ に対する解の中にも現れないことが示される。それゆえに量

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=-g^T{}_{,ii}(g_{ij}{}^{TT},\pi^{ijTT})\\ \frac{1}{2}T_i{}^0&=-\pi^{ij}{}_{,j}(g_{rs}{}^{TT},\pi^{rsTT})\end{aligned} \tag{9.113}$$

は座標にあらわには依存しない。この座標独立性から標準的な保存則を導くことが許される。(9.112a) および式 (9.108) の作用積分は

$$I=\int\{\pi^{ijTT}(g_{ij}{}^{TT})_{,0}-\mathscr{H}(g_{ij}{}^{TT},\pi^{ijTT})\}d^4x \tag{9.108a}$$

に帰着するという事実から二つの独立な正準変数の対は $g_{ij}{}^{TT}$ および π^{ijTT} であることが出てくる。そこでこれらは簡単なポアッソン括弧の関係式

$$[g_{mn}{}^{TT}(\boldsymbol{r}),\pi^{ijTT}(\boldsymbol{r}')]=\delta^{ij}{}_{mn}(\boldsymbol{rr}')^{TT} \tag{9,114}$$

に従う。ここで横波のトレースゼロのδ関数 $\delta_{mn}{}^{ijTT}$ は線形化された理論におけるように定義され勿論計量とは独立である(31)。

場のエネルギー E は運動方程式の与えられた解に対してハミルトニアンの数値であると定義される。それゆえに

---

† $G_\mu{}^0=0$ が少なくとも $g^T{}_{,ii}$ と $\pi^{ij}{}_{,j}$ に対する摂動級数の解をもつことは，これらの座標条件がそういう展開の中に保持される事実と同様に，容易に検証されうる。ハミルトニアンはそれゆえに線形化された理論の $\mathscr{H}$ をもって始まる正準変数のべきにおける無限級数として表現されうる。

$$E=-\int g^T{}_{,ii}d^3x \tag{9.115}$$

を評価するときに $g^T{}_{,ii}$ は正準変数を用いて表される必要はなく，そこでEは（たとえハミルトニアンがこの形に帰着されえないとしても）表面積分として評価されうる。式（9.109a）から

$$E=-\int g^T{}_{,i}dS_i=-\int(g_{jj,i}-g_{ij,j})dS_i \tag{9.116}$$

を得る。ここで $dS_i=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}dx^jdx^k$ は直交座標における無限遠での2次元の曲面要素である。計量は漸近的に平坦となり，座標は空間的な無限遠で直交系となることを仮定した。これらの束縛条件を保存する座標変換は，g^T が座標のスカラー(31)であるとき線形化された理論によって厳密に取り扱うことができる。それゆえエネルギーを評価するために計量を正準座標系によって表現することは必要でない；また通常の平坦な空間のテルソル変換を行って望みの（たとえば球面の）座標系を作り出すことができるものと要請すれば直交座標を用いることは必要でない。この定義は閉じた系のエネルギーが g^T の漸近展開における $1/r$ の係数から得られうることを実際上述べている。それはまた（境界条件のおかげで）遠くのテスト粒子によって見られるときの系の重力質量である。エネルギーが一定であることはこの係数が時間には依存しないことを保証する。式（9.116）は点状粒子が重力場に結合されるときに修正なしに成り立つ；Eは結合系の全エネルギーを表している。シュヴァルツシルトの計量の簡単な場合にはもちろんエネルギーは質量パラメターであることが見いだされる。

閉じた系のエネルギーと運動量に対して，それらが与えられた時刻において系の状態を指定するために要求される量だけを含んでいるということが一つの望ましい判定条件である。一般相対論では座標条件が用いられずそれが $g_{0\mu}$ を含まないときにこれらの変数は g_{ij} および π^{ij} であり，それは後の時刻においていかに座標が選ばれるだろうかを記述するのに役立つ。エネルギーに対する表式（9.115）はこの条件を満足する。上に類似した考察は，π^i がふたたび漸近的な領域において座標のスカラーであるとき重力系の全運動量に対して成り

立つ。$g_{0\mu}$ が決定されていない初期値問題の1例は Lichnerowicz(33) の“多体”の空間的計量である：

$$g_{ij}=\delta_{ij}[1+\sum \alpha_n/2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|]^4 \qquad (9.117a)$$

$$\pi^{ij}=0 \qquad (9.117b)$$

ここで式 (9.116) はエネルギーの値 $\sum \alpha_n$ を一義的に与える。

この定式化はまた重力輻射の存在に対する判定条件を確立することを許す；これらは電磁理論のそれと正確に対応している。それゆえに輻射が無限遠に逃げて行くための条件はそこでのポインティングベクトルを用いて述べられる。無限遠での表面要素 dS_i を横切るエネルギー束は

$$T_i{}^0 dS_i=-2\pi^{ij}{}_{,j}dS_i \qquad (9.118)$$

そこでふたたび右辺は任意の漸近的に直交する座標系で評価されてよい。もっと一般には任意の点における重力波の存在に対する判定条件は（正準座標系において）そこでの0でない $g_{ij}{}^{TT}$ あるいは π^{ijTT} の存在である。いいかえればそういう状況はその正準変数の一つ（それは源の変数とは独立であるところの）において重力場の励起が存在することを意味する。これは，電磁場の正準変数 $A_i{}^T$ あるいは $E_i{}^T$ の存在を要求するところの波の電磁的な定義と等しい。何の波も存在しないことが明白な場合すなわちシュヴァルツシルトの解では $g_{ij}{}^{TT}$ および π^{ijTT} が正準系のいたるところで0になることが証明でき，それが“一体”の解とみなされることを正当化する。これは上に取り扱われた“多体”の初期条件に対して確立されていない。

9.6 一般相対論の量子化についての注意

Landau により，Klein によりまた Pauli によって，量子化された一般相対論が，高エネルギーにおいては素粒子の理論に考慮されねばならないだろうことが注意された。量子電気力学に対する切断の運動量 P は

$$\ln P^2/m^2c^2 \approx 1/\alpha \qquad (9.119)$$

をもつことが暗示される。ここで α は微細構造定数であり m は電子の静止質量である。(9.119) の結果は Källen および Pauli によって数学的無矛盾性の結

果として与えられた。Landau は，切断運動量に相当するエネルギーに対して重力相互作用はすでにクーロン相互作用と同じオーダーの大きさであることを注意した。いいかえればエネルギーが増加すると質量と重力相互作用が増加する。けれども電荷は変化しない。

量子論の原理は非常によく確立されている。それらは自然の“粒状の”構造および測定器械と測定される系の間の相互作用を考慮に入れる。P.G. Bergmann が述べたように量子化されない一般相対論は量子論と平和的に共存できない。重力場は計量テンソルである；この意味においてそれは物理学においてもっとも基本的な場である。その量子化は時空間の概念を，とくに小さい大きさ（高エネルギー）の領域において，深刻な流儀で影響を与えるかもしれない。

$\hbar$，G および c から長さの次元をもつ量を作り上げることが可能であり，それは

$$L=\sqrt{(\hbar G/c^3)}\sim 10^{-33}\mathrm{cm} \tag{9.120}$$

であることは興味深い。

これは現存知られている素粒子の大きさと直接に関連させるにはあまりにも小さい。もし[†] ファインマンの定式化を用いて量子化を考えるなら，場に対する波動関数として

$$\psi_{後}=\int K_E(c, c')\psi_{前}(c')dc'$$

と書くべきである。ここで積分核は

$$K_E=\sum_H e^{iI_H/\hbar} \tag{9.121}$$

によって与えられ，Hはすべての場の歴史についての和を意味する。重力場に対して

$$e^{iI_H/\hbar}=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int(c^3/16\pi G)R\sqrt{-g}d^4x\right]_H \tag{9.122}$$

ファインマンの和はローレンツの符号と矛盾のないすべての計量と位相を，受け入れられる歴史として原理的には含むべきである。

---

† この議論は J. A. Wheeler の論評に従う。

$$R \sim \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x}\right)^2$$

であるから，(9.122) からもし4次元の時空間の一辺が L 単位の領域を考えるなら量子的な変動は

$$\langle (\Delta g_{\mu\nu})^2 \rangle \sim \frac{\hbar G}{c^3 L^2} \tag{9.123}$$

のオーダーをもつことが期待できると結論される。またおそらく量子論的場の理論の因難の改善を期待できるかもしれない(18)。光円錐の上で特異性をもつところの，そこで用いられる多数の関数が存在する。平坦な空間における光円錐の上にある2個の点を考えよう。もしいま空間が曲がっているなら第2の点はもはや光円錐の上にはないだろう。もしファインマン和が，すべての計量の上で，遂行されるなら，光円錐に結びついた困難は測度0をもつことがわかるかもしれない。このことは不幸にして平坦な空間の線形近似をもって出発する任意の量子化の方法はただちにすべての発散を生ずるだろうことを示している。それらを除くためには最初から非線形な理論を量子化することが必要であるかもしれない。

9.7 一般相対論におけるスピノール

一般相対論におけるスピノール場を議論するために Bargmann† によって用いられた定式化を簡単に議論しよう。γ 行列の場が導入され，それは反可換則を満たす。

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} I \tag{9.124}$$

I は単位行列である。γ の成分は座標の連続関数であることが仮定され，座標変換の下でベクトルのように変換することが仮定される。スピノール変換

$$(\text{スピノール})_{\text{新}} = S^{-1} (\text{スピノール})_{\text{古}} \tag{9.125}$$

の下で γ は

$$(\gamma_\alpha)_{\text{新}} = S^{-1} (\gamma_\alpha)_{\text{古}} S \tag{9.126}$$

---

† D. Brill と J. A. Wheeler; *Revs. Modern Phys.* **29**, 465 (1957) により議論されたごとく。文献 42, 43, 44 も見よ。

のように変換される。行列要素が実数であるところのスピノール変換Sと一緒にγの実数の表現だけを取り扱うのがより簡単である。

次の定式化はテンソルはテンソルのように変換し，スピノール変換の効果が(9.125) によって与えられるようなものであり，スピノール変換のスピノールテンソルへの効果は

$$(T_{\mu\nu})_{新}=S^{-1}(T_{\mu\nu})_{古}S \tag{9.127}$$

となるだろうことを保証するように手はずが整えられている。

共変微分に対して付加的な4×4行列Γ_αが導入される。これらのΓは(9.124) から単位行列の整数倍を別として関係式

$$\gamma_{\mu,\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\gamma_\alpha-\Gamma_\nu\gamma_\mu+\gamma_\mu\Gamma_\nu=0 \tag{9.128}$$

によって決定される。x^μに関してのスピノール変換性をもつ量の共変微係数は∇_μと書かれ，そうして

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(AB)&=(\nabla_\mu A)B+B(\nabla_\mu A)\\ \nabla_\mu(A^*)&=(\nabla_\mu A)^* \\ \nabla_\mu\gamma_\nu&=0\end{aligned} \tag{9.129}$$

という性質をもつ。この式の中の * は複素共役の転位を表す。特殊相対論において用いられるγ行列の一次結合が使われうる。これらは$\tilde{\gamma}_\mu$と書かれ

$$\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\nu+\tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}_\mu=2\delta_{\mu\nu};\qquad \tilde{\gamma}_i{}^*=\tilde{\gamma}_i;\qquad \tilde{\gamma}_0{}^*=-\tilde{\gamma}_0 \tag{9.130}$$

を満足する。四脚 (Vierbein) の系がしばしば用いられる。局所的にローレンツ的な計量が各点で

$$dx^\mu=a^\mu{}_\nu d\tilde{x}^\nu;\qquad d\tilde{x}^\mu=b_\beta{}^\mu dx^\beta \tag{9.311}$$

と書くことにより導入される。ここで$\tilde{x}^\nu$はローレンツ計量をもつ座標でありx^νは一般的な座標である。

(9.124) を満足する一組のγは

$$\gamma_\mu=b_\mu{}^\nu\tilde{\gamma}_\nu \tag{9.132}$$

である。(9.128) の解であるところのΓ_μに対する表式は

$$\Gamma_\mu=\frac{1}{4}g_{\kappa\alpha}\left[\left(\frac{\partial b_\nu{}^\beta}{\partial x^\mu}\right)a^\alpha{}_\beta-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\right]S^{\kappa\nu}+a_\mu I \tag{9.133}$$

である。ここで a_μ は任意であり $S^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$ である。もし四脚の定式化が用いられるならスピノールの相似変換は四脚のローレンツ変換に対応する。

スピノール ψ の共変微係数は

$$\nabla_\mu\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-\Gamma_\mu\psi \tag{9.134}$$

によって与えられる。スピノールテンソル $F_{\mu\nu}$ の共変微係数は

$$\nabla_\alpha F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu;\alpha}+F_{\mu\nu}\Gamma_\alpha-\Gamma_\alpha F_{\mu\nu} \tag{9.135}$$

である。

ψ のパウリ共役は $\psi^\dagger$ と書かれ

$$\psi^\dagger=\psi^*\beta \tag{9.136}$$

によって定義される。β はエルミートな行列で $\beta\, i\gamma^\nu$ もまたエルミートであるように選ばれる。四脚の定式化では $\beta=i\tilde{\gamma}^0$ である。電磁密度のような実の量は

$$J^\mu=\psi^\dagger i\gamma^\mu\psi \tag{9.137}$$

と書かれる。一般相対論におけるディラック方程式は

$$\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi+\mu\psi=0 \tag{9.138}$$

で，4元ポテンシャルの効果を含むように準備された Γ_μ のトレースは任意である。(9.138) は変分原理

$$\delta\int[\psi^\dagger\gamma^\alpha(\nabla_\alpha\psi)+\mu\psi^\dagger\psi]\sqrt{-g}\,d^4x=0 \tag{9.139}$$

から，$\psi^\dagger$ と ψ は独立に変分させて得られる。

原子が自然の時計であるという仮定はこれらの関係式から正当化されてよい。われわれは原子の世界線に沿ったローレンツ系を導入できる。リーマンテンソルが内部運動に影響をもつためには原子の大きさは小さすぎるから，平坦な空間の (9.138) が成り立つ。輻射と遠くの原子のそれとを比較するために時間座標だけを変化させ，異なった場所にある原子に対して同じ時間座標が用いられるように座標変換が遂行される。(9.124) から $\gamma^0=\tilde{\gamma}^0(-g^{00})^{\frac{1}{2}}$ となる。エネルギーは $\tilde{\gamma}^0\partial/\partial x^0$ と結びついており，そこでエネルギー準位は $E^n=E^{n0}$

$(-g_{00})^{\frac{1}{2}}$となって，赤方偏移の公式と一致する。

文　　献

1. G. Y. Rainich, *Trans. Am. Math. Soc.* **27**, 106 (1925).

2. C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Ann. Physics* **2**, 6, 525 (1957).

3. J. A. Wheeler, *Ann. Physics* **216**, 604 (1957).

4. B. Kursunoglu, *Proceedings of the Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics*, 1957; ASTIA Document AD 118180; WADC Tech. Rept. 57 - 216.

5. V. Hlavaty, *Geometry of Einstein's Unified Field Theory*, P. Noordhoff, N. V., Groningen, Netherlands, 1957.

6. A. Einstein and J. Grommer, *Sitzber. preuss. Acad. Wiss.* **1**, 6, 235, (1927).

7. V. Fock, *Revs. Modern Phys.* **29**, 3, 325 (1957).

8. A. Einstein, L. Infeld, and Hoffmann, *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).

9. L. Infeld, *Acta Phys. Polon.* **13**, 187 (1954).

10. J. N. Goldberg, *Phys. Rev.* **89**, 263 (1953).

11. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton Universty Press, 1950, 3 rd ed., p. 107.

12. A. Friedman, *Z. Physik* **10**, 377 (1922).

13. H. P. Robertson, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.* **15**, 822 (1929).

14. J. L. Anderson and P. G. Bergmann, *Phys. Rev.* **83**, 1018 (1951).

15. P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).

16. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* A **246**, 326 (1958).

17. P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller, and H. Zatzkis, *Phys. Rev.* **80**, 81 (1950).

18. S. Deser, *Revs. Modern Phys.* **29**, 417 (1957).

19. F. A. E. Pirani and A. Schild, *Phys. Rev.* **79**, 986 (1950).

20. F. A. E. Pirani, A. Schild, and R. Skinner, *Phys. Rev.* **87**, 452 (1952).

21. P. G. Bergmann, *Helv. Phys. Acta*, Suppl. IV, 79 (1956).

22. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (*London*) A **246**, 333 (1958).

23. *Revs. Modern Phys.* **29**, 5 (1957) の中の論文を見よ。

24. L. Witten. *Phys. Rev.* **115**, 1, 206 (1959).

25. A. E. Scheidegger, *Phys. Rev.* **99**, 1883 (1955).

26. P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.* **114**, 924 (1959).

27. L. Infeld, *Revs. Modern Phys.* **29**, 398 (1957).

28. R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Nuovo Cimento* XV, 487 (1960).

29. G. Cocconi and E. E. Salpeter, *Nuovo Cimento* **10**, 646 (1958).

30. G. Cocconi and E. E. Salpeter, *Phys. Rev. Letters* **4**, 176 (1960).

31. R. Arnowitt and S. Deser, *Phys. Rev.* **113**, 745 (1959).

32. R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Phys. Rev.* **116**, 1322 (1959).

33. A. Lichernowicz, *J. Math. Pure and Appl.* **9**, 37 (1944).

34. J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **97**, 511 (1955).

35. A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc.* A **209**, 248 (1951).

36. L. I. Schiff, *Phys. Rev. Letters* **4**, 215 (1960).

37. D. W. Sciama, *Monthly Notices* **113**, 34 (1953).

38. Sherwin, Frauenfelder, Garwin, Luscher, Margulies, and Peacock, *Phys. Rev. Letters* **4**, 399 (1960).

39. Hughes, Robinson and Beltran-Lopez, *Phys. Rev. Letters* **4**, 342 (1960).

40. H. Bondi, *Cosmology*, 1952, Cambridge University Press.

41. O. Halpern and G. Heller, *Phys. Rev.* **48**, 434 (1935).

42. D. Ivanenko, *Trans. Acad. Sci. U. S. S. R.*, (1929).

43. V. Fock and D. Ivanenko, *Comptes Rendues* **188**, (1929).

44. V. Fock and D. Ivanenko, *Z. Physik* **59**, 718 (1929).

45. L. Witten, *Phys. Rev.* **120**, 635, (1960).

46. H. Thirring, *Phys. ZS.* **19**, 33, (1918), **22**, 29, (1921).

47. P. Jordan, Jubilee of Relativity Theory, *Helvetica Physica Acta, Supp.* IV, 157, (1956).

48. O. Heckmann and E. Schucking, Jubilee of Relativity Theory, *Helvetica Physica Acta, Supp.* IV, 114, (1956).

49. O. Klein, Jubilee of Relativity Theory, *Helvetica Physica Acta,* Supp. IV, 58, 147, (1956).

50. G. E. Lemaitre, *Monthly Notices* **91**, 490, (1931).

51. L. Landau, in *Niels Bohr and the Development of Physics,* edited by W. Pauli. McGraw Hill Book Company, 1955.

52. O. Klein, *in Niels Bohr and the Development of Physics,* edited by W. Pauli, McGraw Hill Book Company, 1955.

53. P. Havas, *Phys. Rev.* **113**, 732, (1960).

練　習　問　題

練習問題を熱心にしなさい；そうすればあなたが何を理解したかまた何を理解していないかを見いだすであろう。

A. Sommerfeld (W. Heisenberg へ)

1. 斜交座標系が用いられている平面内のベクトルの共変および反変成分を議論せよ。

2. 表式 (3.30) および (3.31)，第一種と第二種のクリストッフェル記号に対する変換則を導け。

3. N次元の空間の中の $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の独立成分の数は $(N^2/12)(N^2-1)$ であることを示せ。

4. N次元の曲がった空間を N より大きい次元数をもつ平坦な空間の中へ埋没させることについて議論せよ。

5. $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ に対する式 (3.49) を導け。

6. 円環面の上に座標系を設定せよ；$g_{\mu\nu}$，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ および $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ のすべての成分を計算せよ。

7. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ を評価せよ。

8. 反変ベクトルが一つの球の小円に沿って平行移動されつつある。それは点 $\theta=\pi/4$，$\varphi=0$ において成分 $A^{\theta}=0$ および $A^{\varphi}=2$ をもつ。移動しつつある道筋は $\theta=$定数 である。A^{θ} と A^{φ} の値を小円に沿う φ の関数として計算せよ。

9. 一様に加速された系の中の観測者は，彼がそれに関して加速されつつある慣性系の中に固定され同期された時計を用いて時間を測定する。加速された観測者に対する $g_{\mu\nu}$ を計算せよ。

10. (4.15) に導く操作を遂行せよ。

11. 式 (5.6) を導け。

12. $A_1=A_2=A_3=0$ および $A_0=f(r)$ をもつ4元ポテンシャルから出発して(5.13a) を導け。

13. 式 (5.21) に級数展開として与えられた正確な赤方偏移の公式を書き，第1章の等価原理からの導出における相対論的ドップラー効果を用いて得られた級数とそれを比較せよ。重力ポテンシャルの変化におけるどんな次数までそれらは一致するか？ このことは一般相対論が等価原理と不一致であることを意味するか？

14. 式 (9.1)，(9.2) および (9.3) を導け。

15. (9.44) はAとBの任意の一次結合に対して同じであるところのKの値を与えることを示せ。

16. ラグランジュアンは次式で与えられたとせよ。

$$L=\dot{q}_0{}^2-q_0{}^2+b_1\dot{q}_1+b_2\dot{q}_2+b_3\dot{q}_3+\dot{q}_4$$

ただし b_1，b_2 および b_3 は q_0，q_1，q_2 および q_3 の関数である。運動方程式を解いて求めよ。

17. (9.87)，(9.91)，(9.95)，(9.106)，(9.107) に導く換算を遂行せよ。

18. 人工衛星が地球表面の上に静止している同じ時計と比較されるべき自然の時計を備えている。もしわれわれが与えられた座標時間の終わりにおいて経過した間隔を比較するならば

$$\frac{ds_1-ds_2}{ds_1}=\frac{GM}{2c^2r}\left(\frac{1-2h/r}{1+h/r}-\frac{3\omega^2}{4\pi G\rho_M}\right)$$

であることを示せ (Singer, *Phys. Rev.* **104**, 11, (1956))。s_1 は地球の時計の場合の間隔，s_2 は人工衛星の時計の場合の間隔，h は地球表面からの円形軌道の高さ，M は地球の質量，ρ_M は地球の平均密度，r と ω はそれぞれ地球の半径と角速度を表している。

19. (9.107) の中の3次元スカラー曲率であるところの項を見分けよ。

20. スピン0およびスピン1の粒子に基づいた重力の理論を議論せよ (Gupta, *Revs. Mod. Phys.* **29**, 334, (1957)) そうしてなぜそれらが不満足であるかを説明せよ。

訳者あとがき

10年程前に涼しいシャトルのワシントン大学で一夏を過したことがある。このとき同室だったオーストリアから来た Roman Sexl は一般相対論の専門家だったので勢い話題はアインシュタインの理論の美しさや重力波の検出の可能性などに及ぶことが多かった。同氏に是非読んで見よとすすめられたのが，L. Witten の "Gravitation" (John Wiley and Sons, 1962) および V. Fock の "Theory of Space Time and Gravitation" (Pergamon Press, 1959)，それからこの J. Weber の "General Relativity and Gravitational Waves" である。眼を通してみると重力波の研究をライフワークと考えている Weber という人のもつ執念のようなものをこの小さいテキストの中に感じたような記憶がある。

Weber 博士がアルミニウムの棒を真空容器中につるした重力波検出器を使って 1000km もはなれた二つの装置の同期振動から重力波の存在を報告して世界的なセンセーションを巻き起こしたのはその後４，５年経ってからのことである (J.Weber, *Phys. Rev. Letters* **22** (1969) 1320など)。この実験が確定的なものであるかどうかについては多くの追試が進行中のようであるから遠からず結論が出されよう。しかしいずれにせよ Weber の研究が重力波という最もエクサイティングな対象をアタックするための重要なマイルストンであることは間違いないであろう。

60年代に重力と関係深い宇宙物理学の分野に数多くの発見があったことについていまさら多言を要しまい。カリフォルニア工科大学の John Bahcall が訳者に語った言葉は「僕は *Astrophysical Journal* が届くたびにこんどはどんな発見があったかと胸がどきどきするよ」であった。また最近，佐藤文隆，富松彰両氏がアインシュタイン方程式の新しい厳密解を発見されたことは喜ばしいニュースであった。今後の発展が楽しみである。

終わりに訳出にあたって種々の御教示をいただいた東大理学部の平川浩正博

士に心から感謝したい。それにもかかわらず訳者の理解不足のため訳文にいろいろの不備な点もあろう。ご指摘いただければ幸いである。なお講談社の日東英光氏に終始お世話になったことを感謝したいと思う。

昭和49年5月　　東京教育大学理学部物理学教室

藤　田　純　一

索　　引

そ

た

ち

て

と

な

に

の

は

ま

み

む

め

や

ゆ

よ

ら

り

る

れ

ろ

著　　者

Joseph Weber（ヨゼフ　ウェーバー）

メリーランド大学　物理学教授

訳　　者

藤田純一（ふじた　じゅんいち）

東京教育大学　理学部教授

一般相対論と重力波

昭和49年9月8日　第1刷発行
昭和51年2月20日　第2刷発行

訳　者　藤　田　純　一
発行者　野　間　省　一
発行所　株式会社　講　談　社
東京都文京区音羽 2-12-21
郵　便　番　号 112
電話 東京 03（945）1111
振替口座東京 8-3930
印刷所　株式会社　祥文堂印刷所
製本所　株式会社　小島製本所

落丁本・乱丁本はおとりかえいたします。　（理科）

ケプラーの夢

ケプラー 著　渡辺正雄・榎本恵美子 訳

A 5 判　218頁

ポテンシャル散乱論

ダルファロ・レッジェ 著　原 康夫 訳

A 5 判　228頁

量子力学における三体問題

ワトソン・ナッタル 著　三島信彦 訳

A 5 判　160頁

終状態における相互作用

ギルスピー 著　尾立晋祥 訳

A 5 判　128頁

原子核モデルと核力の統一理論

ブラウン 著　香村俊武 訳

A 5 判　280頁

初等 場の量子論

ヘンリー・ティーリング 著　野上幸久 訳

A 5 判　336頁